

動的問題における数値計算法の精度について*

服 部 秀 人**

1. ま え が き

動的外力に対する構造物の応答問題を扱う場合、微分方程式を数値的に解く必要がしばしば生ずる。その方法には、ルンゲ・クッター法、Newmark's β 法等いくつか考えられるが、これらの方法で得られる解が理論解とどの程度の差を示すものなのか、またお互いにどのような違いを見せるのか、について各種の入出力関係のもとに明らかにしておくことは、実際に数値計算を行なう際に有用であろう。

土木構造物に作用する動的外力は、一般に地震のような不規則外乱であり、このような外力に対する応答の理論解を数式的に示すことは非常に困難である。通常は上記数値計算法により応答を求めている。不規則な動的外力は、フーリエ級数の助けを借りることにより、正弦波外力の重ね合わせとして近似的に表わされる。複数列の正弦波外力に対する線形応答の理論解を数式的に求めることはそれほど困難ではない。このことは、数値計算法の精度の検討に際し、作用外力として正弦波を用いることの妥当性を示唆しているものと考えられる。

そこで本報文では、1 自由度系モデルに関して、ルンゲ・クッター法、Newmark's β 法（線形加速度法を含む）および差分法を精度検討の対象に選び、正弦波入力に対する理論解と各数値解とを比較し、各計算法の特徴を調べた。

2. 運動方程式と計算方法

2.1 運動方程式と理論解

1 自由度系の固有円振動数を ω_0 とすると、正弦波地動による外力を受ける系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\sin \omega t \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 x , \dot{x} , \ddot{x} はそれぞれ応答の変位、速度、加速度を意味し、 h は減衰定数、 ω は外力の円振動数である。

式(1)の理論解は、

(1) $\omega \neq \omega_0$, $h \neq 0$ の場合

$$x = e^{-h\omega_0 t}(A \sin \omega_0' t + B \cos \omega_0' t) + C \sin(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、

* 昭和51年1月、土木学会関東支部年次研究発表会において発表

** 土木工学科助手

原稿受付昭和51年9月30日

$$C = \frac{-1/\omega_0^2}{\sqrt{\{1-(\omega/\omega_0)^2\}^2 + 4h^2(\omega/\omega_0)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2h(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}, \quad \omega_0' = \omega_0 \sqrt{1-h^2}$$

であり, A, B は初期条件より決定される積分定数である. $t=0, x=\dot{x}=0$ なる初期条件のもとに A, B を定めると,

$$B = C \sin \phi, \quad A = \frac{1}{\omega_0'} (h\omega_0 B - C\omega \cos \phi)$$

(2) $\omega = \omega_0, h \neq 0$ の場合

式(2)において

$$\phi = -\frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{-1}{2h\omega_0^2}, \quad A = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} B$$

となる.

(3) $\omega = \omega_0, h = 0$ の場合

$$x = \frac{1}{2\omega_0} (t \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t) \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる.

2・2 数値計算法

差分法, ルンゲ・クッター法および Newmark's β 法について簡単に述べる,

(1) 差分法

時間刻みを Δt とし, $t = n\Delta t$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) における応答変位を x_n とすると,

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

これらを式(1)に代入する. この単なる差分法では当然解の精度は良くないであろうが, 他の方法と比較するため, あえて検討の対象に選んだ.

(2) ルンゲ・クッター法

1階の微分方程式を, $\dot{x} = f(x, t)$ とするとき

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} (M_0 + 3M_2) + O(\Delta t^4) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし,

$$M_0 = f(x_n, t_n) \Delta t$$

$$M_1 = f(x_n + \frac{M_0}{3}, t_n + \frac{1}{3} \Delta t) \Delta t$$

$$M_2 = f(x_n + \frac{2}{3} M_1, t_n + \frac{2}{3} \Delta t) \Delta t$$

である。これが Δt^4 に比例する誤差 ($O(\Delta t^4)$) を有するルンゲ・クッター公式で、一般によく用いられるようである。式(6)の原理を式(1)の2階微分方程式に適用するには、式(1)をつぎのように2つの1階微分方程式に分解する⁽⁶⁾。

$$\dot{v} = -(\sin \omega t + 2h\omega_0 v + \omega_0^2 x), \quad \dot{x} = v$$

(3) Newmark's β 法

Δt 時間内の加速度の変化の仮定に従って β の値を変えるもので、 $\beta=1/6$ とおくと線形加速度法となり、 $\beta=0$ とおくと2次項まで考慮した差分式となる⁽⁴⁾。

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{x}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{x}_{n+1} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{x}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{x}_{n+1} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(7)、(8)を式(1)に代入する。この方法もルンゲ・クッター法同様広く用いられている。なお本報文では、 $\beta=1/6, 1/4, 1/8$ の3種について検討した。

2.3 パラメータ

系の固有周期 T_0 を1秒として、計算の時間刻み Δt を $T_0/100$ および $T_0/50$ の2通りとし、正弦波外力の周期と系の減衰性とをパラメータとした。以下に計算方法を列記する。

(1) 外力のタイプは、 $\lambda=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.0, 1.05, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.75, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0$ の25種類とする。 λ とは、系の固有振動数 ω_0 と正弦波外力の振動数との比、すなわち $\lambda=\omega/\omega_0$ である。

(2) 減衰定数は、 $h=0, 0.02, 0.05, 0.1, 0.4$ の5種類とする。

(3) 外力の継続時間は、 $\lambda < 1.0$ の場合 $t=10T_0/\lambda$ 、 $\lambda \geq 1.0$ の場合 $t=10T_0$ とする。これは、卓越した応答波形を10周期得るためである。

(4) 精度の比較は、応答の変位と絶対加速度における、それぞれの最大値および波形の平均パワーについて行なう。平均パワーは応答の卓越波形における10周期目のピークまでの値とする。

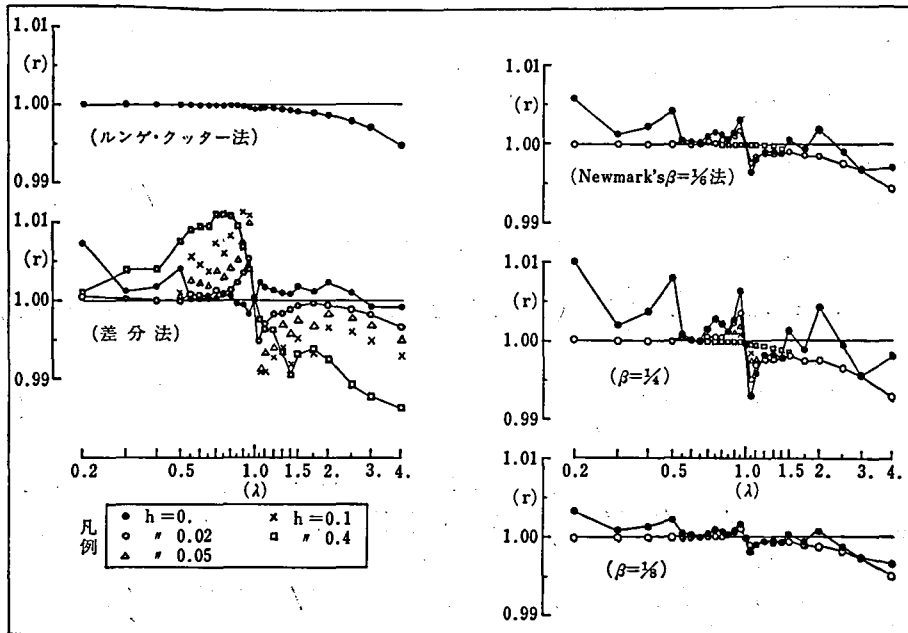
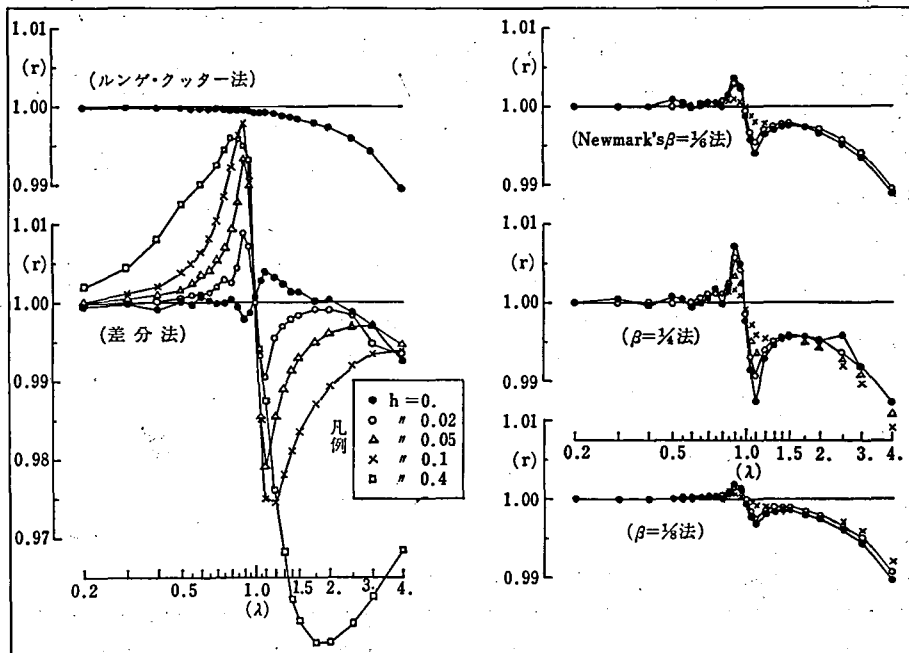
(5) ここでいうところの精度とは、理論値に対する各数値計算法による値の比 (r) で表わすものとする。すなわち $r=1$ ならば、数値計算法による値が理論値と一致したことになり、 $r < 1$ ならば計算値が理論値を下回ったことになる。

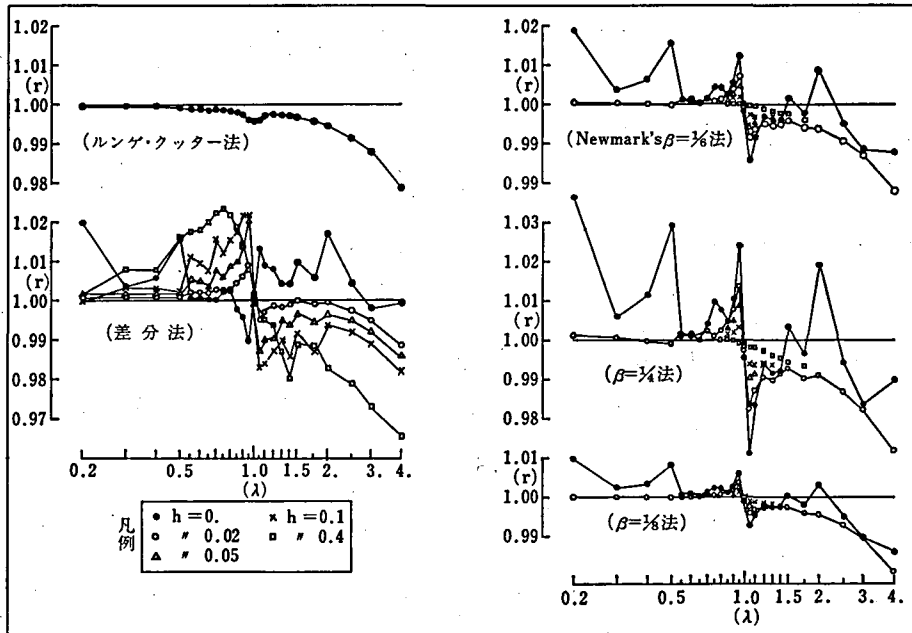
本報文では系の固有周期 T_0 を1秒に限定しているが、以上の方法で得られた結果は任意の T_0 に対してもあてはまる。

3. 計算結果

3.1 計算結果

計算結果を図1～3に示す。各計算法について、縦軸に理論値に対する比 r を、横軸に振動数比 λ をそれぞれとり、各減衰定数 h ごとにプロットしてある。ルンゲ・クッター法については、 $h=0$ の場合のみプロットしてあるように見えるが、他の h の場合も $h=0$ の場合とほとんど一致し、図上に表われなかったのである。他の図でも、 h による差異が著しく少

図1 変位の最大値の精度 ($\Delta t=1/100\text{sec}$)図2 変位の平均パワーの精度 ($\Delta t=1/100\text{sec}$)

図3 変位の最大値の精度 ($\Delta t=1/50\text{sec}$)

ないものについてはプロットしていない。なお図は変位の最大値と平均パワーについてのものであるが、加速度の場合は差分法を除いて性状的にも量的にも変位の場合とほとんど差異がなく、また差分法自体を精度比較の対象としてそれほど重要視していないので、加速度の結果については図を省略する。計算時間刻み $\Delta t=1/50$ 秒の場合については、図3に変位の最大値に関する精度のみを示す。この平均パワーについては、 $\Delta t=1/100$ 秒の場合の図1、2相互の関係と精度の特徴は全く同様である。

3・2 各数値計算法の精度の特徴

各数値計算法は次のような特徴を有すると思われる。

(1) 差分法；当然のことながら精度は良くないが、減衰定数 h が0か非常に小さい場合はそれほど精度は悪くない。

(2) ルンゲ・クッター法；精度が非常に良い。減衰の有無による差異がほとんどない。ただ、計算値が理論値より小さくなる（危険側の値となる）。しかし時間刻みを一般に用いられている値 $\Delta t=1/100$ 秒程度とするならば、工学的には無視してさしつかえない誤差量であると考えられる。

(3) Newmark's β 法；振動数比 λ の違いによる精度の変化が著しい。共振点 ($\lambda=1$) では理論値とほぼ一致するが、その両側において、 $\lambda<1$ の場合は理論値より大きく、 $\lambda>1$ の場合は小さくなる。この特徴は、非線形応答の共振曲線における「いわゆる共振点のずれ」を助長することになる。減衰定数の小さい方が精度は悪い。これは差分法と逆である。 β の値3種の違いでは、 $\beta=1/8, 1/6, 1/4$ の順に精度が良い。なお、減衰定数が大変小さ

く、かつ線形応答の場合に、 $\beta=1/12$ のとき良い精度を示したと報告されている⁽⁶⁾。

(4) 計算時間刻みについて；応答量の何を必要とするかで異なることではあるが、一般的に用いられているからといって、むやみに $\Delta t=1/100$ 秒とすることは、工学的にみて精度が良すぎ、無駄な場合もある。 $\Delta t=1/50$ 秒程度でも精度は余り悪くない。なお、これに関連して国井らが報告している⁽¹⁾。

4. あ と が き

耐震工学の分野で広く利用されている数値計算法、ルンゲ・クッター法および Newmark's β 法について、振動系の減衰性と応答の共振曲線とに関連した精度の特徴をかなり明確にできたと思われる。本報文での振動モデルは1自由度系ではあるが、モーダルアナリシス等による多自由度系の振動計算においても、本結果の適用は可能であろうし、地震のような不規則外乱に対する応答計算においても、入力波のフーリエスペクトルを参考にして、計算精度を類推することができると考えられる。

なお、本数値計算には、本校の FACOM 230-25 を単精度で使用した。計算に際し、懇切な御指導をいただいた機械工学科風間悦夫助教授ならび同堀内征治助手、そして終始御指導と御助言をいただいた東京都立大学工学部国井隆弘助教授の各氏に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- (1) 国井、鹿又「動的問題における数値計算法の精度に関する一考察」昭和49年5月土木学会関東支部年次研究発表会
- (2) 田治見「建築振動学」昭和48年2月、コロナ社
- (3) 小坪「土木振動学」昭和48年4月、森北出版
- (4) Newmark, "A method of computation for structural dynamics" ASCE, EM3, July, 1959.
- (5) Chan, Cox, and Benfield, "Transient analysis of forced vibration of complex structural-mechanical systems" J. of the R. A. S, vol. 66, 1962
- (6) Housner and Jennings "Generation of artificial earthquakes" Proc. ASCE, vol. 90, EM1, 1964.