

# ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学での長さ・面積・体積

著者	林本 奏汰, 林本 厚志
雑誌名	長野工業高等専門学校紀要
巻	54
ページ	1-7
発行年	2020-06-30
URL	<a href="http://id.nii.ac.jp/1051/00001067/">http://id.nii.ac.jp/1051/00001067/</a>

## ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学での長さ・面積・体積

林本奏汰<sup>1</sup>・林本厚志<sup>2</sup>

The length, area and volume in Euclidean and Non-Euclidean geometry

HAYASHIMOTO Kanata and HAYASHIMOTO Atsushi

The relations among perimeter, area and volume of convex polyhedron or convex polygons in Euclidean and non-Euclidean spaces are studied. They are parametrized by the radius of their inscribed circles. The derivative of the area of convex polyhedron with respect to the radius is equal to the perimeter of it. Similar relations hold for the volume and the area in Euclidean space and for the area and the perimeter in non-Euclidean space.

キーワード：長さ，面積，体積，凸多角形，凸多面体，非ユークリッド幾何学，球面幾何学

## 1. 動機

数学に関して中学校で習う内容を発展させたものとして位相幾何学，結び目理論，非ユークリッド幾何学，暗号理論などが出前授業で取り上げられることが多い。ここでは非ユークリッド幾何学について取り上げたい。

ある日共著者<sup>2</sup>が「円の面積を微分すると周の長さになるのは何故か？」と聞いてきた。その場では答えは分からなかった。「ほかの図形ではどうなのか，立体ではどうなのか」を考えてみるように助言した。その内容がこの記事の内容である。これくらいのことは分かっている誰かが考えていてもおかしくはないが，インターネットで調べてみても内接円に関するもっと詳しいことは載っていない。しかし本論を読んでいたければ分かるが，使われる道具や手法はすべて高校で習う内容であり，高校の内容を非ユークリッド幾何学に応用するのに適切な内容であると思われる。これ

を読んだ学生が興味を持ってこの内容をさらに発展させたり，教員が学生に指導するときの題材としたりしていただくと幸いである。

このノートは次のような構成になっている。2章ではユークリッド幾何学での周の長さとの面積の関係，および表面積と体積の関係を述べる。3章ではその<sup>1</sup>状況が非ユークリッド幾何学ではどうなるかを調べる。球面凸正多角形の場合には，その周の長さを内接円の半径で微分しても面積は出てこない。しかし周の長さの高次の項を無視すれば面積となることが示された。4章では今後の課題をまとめた。

## 2. ユークリッド幾何学の場合

半径 $r$ の円の面積は $\pi r^2$ ，周の長さは $2\pi r$ なので，確かに面積を微分すると周の長さになっている。正三角形の内接円の半径を $r$ とすると面積は $3\sqrt{3}r^2$ ，周の長

<sup>1</sup> 長野市立長野高等学校 3年生

<sup>2</sup> 長野工業高等専門学校 一般科 教授  
原稿受付 2020年5月18日

さは $6\sqrt{3}r$ であり、面積を微分すると周の長さになっている。立体については体積と表面積がその関係になっている。例えば正八面体の内接球の半径を $r$ とすると体積は $4\sqrt{3}r^3$ 、表面積は $12\sqrt{3}r^2$ であり確かにその関係になっている。このようなことは一般にも成り立つのであろうか。得られた定理は次のようである。

定理 1

凸多角形(必ずしも正多角形とは限らない)のすべての辺に内接する内接円の半径を $r$ とする。その多角形の辺の長さの和を $L(r)$ 、面積を $S(r)$ とすると

$$\frac{dS(r)}{dr} = L(r)$$

である。

証明

半径 1 の円に外接する凸 $n$ 角形の各辺の長さを $L_1, \dots, L_n$  とする。このとき多角形の面積は $(L_1 + \dots + L_n)/2$ である(図 1 参照)。これを $r$ 倍に拡大すると相似比により内接円の半径は $r$ 、面積は $S(r) = r^2(L_1 + \dots + L_n)/2$ 、周の長さは $L(r) = r(L_1 + \dots + L_n)$ となる。よって微分により定理が証明される。

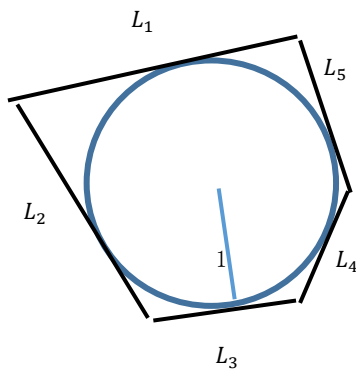


図 1 円に内接する五角形

証明終わり

立体についても同様に半径 1 の球に外接する多面体を $r$ 倍に拡大して体積 $V(r)$ 、表面積 $S(r)$ を求めることにより次の定理が示される。

定理 2

凸多面体(必ずしも正多面体とは限らない)のすべて

の面に接する内接球の半径を $r$ とする、その多角形の表面積を $S(r)$ 、体積を $V(r)$ とすると

$$\frac{dV(r)}{dr} = S(r)$$

である。

### 3, 非ユークリッド幾何学, 特に球面幾何学の場合

非ユークリッド幾何学には、球面幾何学、双曲幾何学、楕円幾何学などがある。ここでは扱いやすい球面幾何学を考える。球面上で幾何学を行うのであるが、このときは直線とは何か、などを定義し直さなくては行けない。

定義

- 1, 球の中心を通る平面と球面との交わりとして現れる円を大円という。
- 2, 球面上の 2 点 P, Q を通る直線とは P, Q を通る大円のことである。
- 3, P, Q を通る大円と P, R を通る大円のなす角で 0 から  $\pi$  の間にあるものを角 RPQ という。
- 4, 球面三角形とは 3 つの大円で囲まれた図形のことをいう。

球面三角形 ABC の内角を順に  $\alpha, \beta, \gamma$  と書き辺の長さを  $AB=c, BC=a, CA=b$  と表す。(図 2 参照) このとき次のような性質が成り立つ。

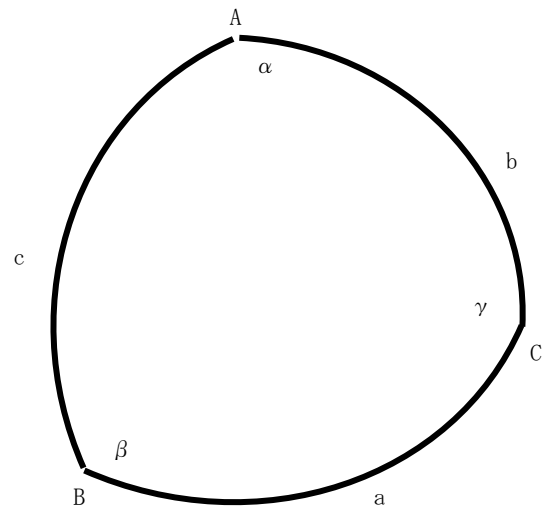


図 2 球面三角形

性質 1

- 1, 球面三角形 ABC に対して次の (1), (2) が成り立つ.  
(参考文献 1) を参照)
- (1)  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$  余弦定理  
(2)  $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$  正弦定理
- 2, 球面  $n$  角形の内角を  $\theta_1, \dots, \theta_n$  とすると, 面積は  $S = (\theta_1 + \dots + \theta_n) + \pi(2 - n)$  である.

任意の 2 つの大円は交わるので, 球面上の任意の 2 直線は必ず交わる. ユークリッド幾何学では「与えられた直線上にない 1 点を通り, 与えられた直線と交わらない直線が 1 本存在する」という平行線の公理があるが, この意味での平行線は球面上に引くことはできない. つまり球面上では平行線の公理は成り立たない. 地球上で巨大な三角形を書いてその内角の和を測定すると 180 度よりも大きくなる. 実際, ガウスは巨大な三角形を測量しその内角の和を測定し, 180 度より大きくなることを確認した. 明らかな状況としては, 北極 N と赤道上的点 P, 点 Q について, 直線 NP と直線 NQ のなす角が 90 度とする. このとき三角形 NPQ の内角の和は 270 度である. (図 3 参照).

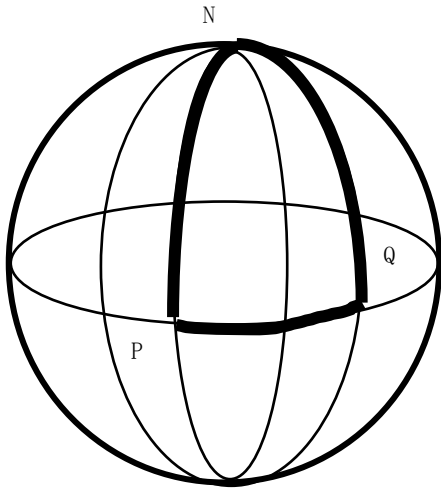


図 3

2 章の定理 1 に対して非ユークリッド幾何学では面積を微分しても周の長さは出てこない. しかし次の定理 3 が成り立つ.

定理 3

半径  $r$  の円に内接する球面凸正  $n$  角形の面積を  $S(r)$ , 辺の長さの和を  $L(r)$  とする. ただし凸正  $n$  角形は上半球面内にあり, すべての辺が内接円に接するとする. このとき

$$\frac{dS(r)}{dr} = 2n \sin \frac{L(r)}{2n}$$

が成り立つ.

$\sin \frac{L(r)}{2n}$  のテーラー展開

$$\sin \frac{L(r)}{2n} = \frac{L(r)}{2n} - \frac{1}{3!} \left( \frac{L(r)}{2n} \right)^3 + \dots$$

を使う. 球の半径に比べて周の長さが十分短いとき,  $L(r)$  の 3 乗以上の項を省略して次の系が成り立つ.

系 1

定理 3 の記号の下で次の近似式が成り立つ.

$$\frac{dS(r)}{dr} \approx L(r)$$

定理 3 の証明を行うための準備を行う. 球面凸正  $n$  角形  $A_1 A_2 \dots A_n$  の内接円の半径を  $r$ , 内接円の中心  $P$  から多角形の頂点までの長さを  $m = m(r)$  とする. 正多角形の一辺の長さを  $\ell = \ell(r)$ , 一つの内角を  $\theta = \theta(r)$  とする. すべての辺が内接円に接するので  $0 < \theta < \pi$  であり, 正  $n$  角形は上半球面にあるので  $0 < \ell < \pi$  である. 内接円と凸正多角形との接点を  $S_1, \dots, S_n$  とする. ここで性質 1 の 2 から面積について

$$S(r) = n\theta(r) + \pi(2 - n)$$

であり, 辺の長さについては

$$L(r) = n\ell(r)$$

である. ただし今後  $\theta(r), \ell(r)$  を簡単に  $\theta, \ell$  と書く. 次の図 4, 図 5 を参照.

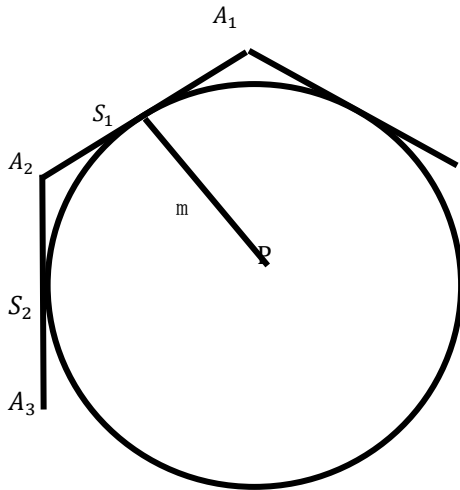


図 4

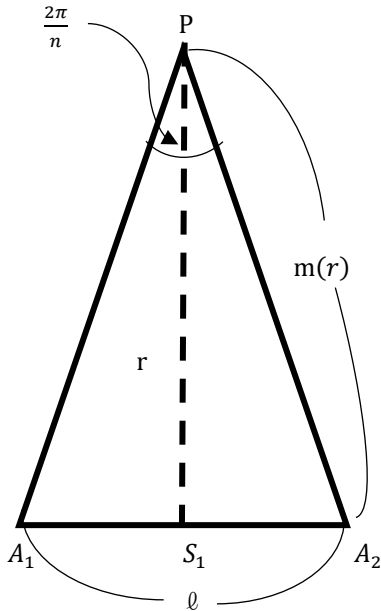


図 5

補題 1

図 4, 図 5 の球面三角形に対して次が成り立つ.

$$\cos r = \frac{2 \left( \cos \theta - \cos \frac{2\pi}{n} \right)}{\sqrt{\left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right) \left( 1 + \cos \theta \right)}} \quad (1)$$

$$\sin r = \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \quad (2)$$

実際にはすべての記号が内接円の半径  $r$  から決まるので, 詳しくは  $\theta(r)$ ,  $m(r)$  と書くべきだが, 煩雑になるので単に  $\theta, m$  と書くことにする.

証明

$\triangle A_1A_2P$  に性質 1 の余弦定理を適用して

$$\cos \theta = (\cos m)^2 + (\sin m)^2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

ここに  $(\sin m)^2 + (\cos m)^2 = 1$  を代入して  $(\sin m)^2$  を消去すると

$$\cos \theta = (\cos m)^2 + \{1 - (\cos m)^2\} \cos \frac{2\pi}{n}$$

よって

$$(\cos m)^2 \left( -1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) = -\cos \theta + \cos \frac{2\pi}{n}$$

両辺に  $-1$  を掛けて  $\left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right)$  で割ってルートを付けると

$$\cos m = \frac{\sqrt{\cos \theta - \cos \frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \quad (3)$$

が得られる.

$\triangle A_1S_1P$  に余弦定理を適用して

$$\cos m = \cos \frac{\theta}{2} \cos r + \sin \frac{\theta}{2} \sin r \cos \frac{\pi}{2}$$

を得る. ただし  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  なのでこの式の一番右の項はゼロ. よって  $\sin r$  は出てこない. (3) を代入して

$$\sqrt{\frac{\cos \theta - \cos \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} = \cos \frac{\theta}{2} \cos r$$

両辺を 2 乗して半角の公式

$$\left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

を代入すると

$$\frac{\cos \theta - \cos \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} = \frac{1 + \cos \theta}{2} (\cos r)^2$$

よって

$$(\cos r)^2 = \frac{2(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n})}{(1 - \cos \frac{2\pi}{n})(1 + \cos \ell)}$$

ルートを付けて(1)式が得られる。ここで図形は上半球面内にあるので $\cos r$ は正であることを注意する。

$\triangle A_1S_1P$ に正弦定理を適用して

$$\frac{\sin m}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin r}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

よって $\sin r = \sin \frac{\theta}{2} \sin m$ .

ここで $(\sin m)^2 + (\cos m)^2 = 1$ つまり

$$\sin m = \sqrt{1 - (\cos m)^2}$$

を代入する。ここで図形は上半球面内にあるの $\sin m$ は正であることを注意する。代入して

$\sin r = \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - (\cos m)^2}$ となり、ここに(3)を代入して

$$\begin{aligned} \sin r &= \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{n} - \cos \ell + \cos \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \ell}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}} \end{aligned}$$

となるので(2)が得られる。

これで補題1の2つの式が証明された。

証明終わり

ここから定理3の証明を行う。

手順は次のようである。

- (1) 球面凸正 $n$ 角形の面積 $S(r) = n\theta + (2 - n)\pi$ でこれを $r$ で微分するので $r$ と $\theta$ の関係式を求め。それが下の(5)式。 $\theta$ は実際には $r$ の式で書けるので $\theta(r)$ と書くべきであったことに注意する。
- (2) (5)式を $r$ で微分すると $\theta', \sin \theta, \sin r, \cos r$ が出てくる。最終的に $\ell = L(r)/n$ を使って表したいので、 $\sin r$ と $\ell$ ,  $\cos r$ と $\ell$ ,  $\sin \theta$ と $\ell$ の関

係式を求める。

- (3) (2)は $\sin r$ と $\ell$ の関係式ではあるが、 $\theta$ も入っているので $\theta$ が入らない式を求めなければいけない。実際にこれらの計算を実行すると次のようになる。

$(\sin r)^2 + (\cos r)^2 = 1$ に補題1の(1)と(2)式を代入して

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \frac{1 - \cos \ell}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} \\ + \frac{2(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n})}{(1 - \cos \frac{2\pi}{n})(1 + \cos \ell)} = 1. \end{aligned}$$

ここに半角の公式

$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1 - \cos \ell}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} \\ + \frac{2(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n})}{(1 - \cos \frac{2\pi}{n})(1 + \cos \ell)} = 1. \end{aligned}$$

両辺に

$$2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 + \cos \ell)$$

を掛けて分母を払うと

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \ell)(1 + \cos \ell) \\ + 4\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 + \cos \ell).$$

展開すると

$$\begin{aligned} \cos \theta \{1 - (\cos \ell)^2\} \\ = 1 - (\cos \ell)^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} (1 - \cos \ell) - 2(1 - \cos \ell) \\ = (1 - \cos \ell)(1 + \cos \ell) - 2 \cos \frac{2\pi}{n} (1 - \cos \ell) \\ - 2(1 - \cos \ell) \end{aligned}$$

$$= (1 - \cos \ell) \left\{ 1 + \cos \ell - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2 \right\}$$

両辺を $1 - (\cos \ell)^2$ で割ると

$$\cos \theta = \frac{(1 - \cos \vartheta)(\cos \vartheta - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1)}{1 - (\cos \vartheta)^2}$$

ここで

$$1 - (\cos \vartheta)^2 = (1 - \cos \vartheta)(1 + \cos \vartheta)$$

なので $(1 - \cos \vartheta)$ で約分して

$$\cos \theta = \frac{\cos \vartheta - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1}{1 + \cos \vartheta} \quad (4)$$

を得る.

$\cos \vartheta$  を消して $\cos r$ を入れるために補題 1(1)式を $\cos \vartheta$  について解いた式を(4)に代入する. まず $\cos \vartheta$  について解いてみる. (1)式を2乗して

$$(\cos r)^2 = \frac{2(\cos \vartheta - \cos \frac{2\pi}{n})}{(1 - \cos \frac{2\pi}{n})(1 + \cos \vartheta)}$$

分母を払って

$$\begin{aligned} (\cos r)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) (1 + \cos \vartheta) \\ = 2 \left(\cos \vartheta - \cos \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

展開して $\cos \vartheta$  についてまとめると

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2\} \\ = -2 \cos \frac{2\pi}{n} - (\cos r)^2 \\ + (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

よって

$$\cos \vartheta = \frac{-2 \cos \frac{2\pi}{n} - (\cos r)^2 + (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2}$$

となり, これを(4)式に代入すると(4)の右辺の分母は次のようになる.

$$\begin{aligned} 1 + \cos \vartheta \\ = 1 + \frac{-2 \cos \frac{2\pi}{n} - (\cos r)^2 + (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2} \\ = \frac{-2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2} \end{aligned}$$

(4)の右辺の分子は次のようになる.

$$\cos \vartheta - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1$$

$$= \frac{-2 \cos \frac{2\pi}{n} - (\cos r)^2 + (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2}$$

$$- 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1$$

$$= \frac{2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2(\cos r)^2 + 2(\cos r)^2 \left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)^2 + 2}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2}$$

$$= \frac{2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) - 2(\cos r)^2 \left\{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)^2\right\}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2}$$

$$= \frac{2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) \left\{1 - (\cos r)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)\right\}}{(\cos r)^2 - (\cos r)^2 \cos \frac{2\pi}{n} - 2}$$

ここで

$$1 - \left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)^2 = \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$$

を使った. よってこれらの分母分子を(4)に代入すると(4)式は

$$\cos \theta = \frac{2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right) \left\{1 - (\cos r)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)\right\}}{-2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}}$$

となるが, 分母は $-2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)$ と因数分解できるので

$$\cos \theta = -1 + (\cos r)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \quad (5)$$

を得る

**cos r と  $\vartheta$  の関係式**

これは補題 1(1)式で出来上がっている.

**sin r と  $\vartheta$  の関係式**

$\sin r = \sqrt{1 - (\cos r)^2}$ に(1)式を代入して

$$\begin{aligned} \sin r \\ = \sqrt{1 - \frac{2(\cos \vartheta - \cos \frac{2\pi}{n})}{(1 - \cos \frac{2\pi}{n})(1 + \cos \vartheta)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 + \cos \ell) - 2\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 + \cos \ell)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(1 - \cos \ell\right)\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(1 + \cos \ell\right)\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}} \quad (6)
 \end{aligned}$$

を得る. ここで図形は上半球面内にあるので  $\sin r$  は正であることに注意する.

**sin θ と ℓ の関係式**

(4) を  $\sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2}$  に代入して

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \ell - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1}{1 + \cos \ell}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(1 + \cos \ell\right)^2 - \left(\cos \ell - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - 1\right)^2}{\left(1 + \cos \ell\right)^2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}}{1 + \cos \ell} \quad (7)
 \end{aligned}$$

を得る. ここで考えている凸多面体のすべての辺が内接円に接するので  $0 < \theta < \pi$  であるから  $\sin \theta$  は正である.

(5) を  $r$  で微分する.

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta(r))' &= -\theta(r)' \sin \theta(r) \\
 ((\cos r)^2)' &= -2 \cos r \sin r
 \end{aligned}$$

である. 下の式では  $\theta(r)$  の  $r$  は省略する. よって (5) の微分は

$$-\theta' \sin \theta = -2 \cos r \sin r \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)$$

となる.  $-\sin \theta$  で割って

$$\theta' = \frac{2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \cos r \sin r}{\sin \theta} \quad (8)$$

分子を計算する. (1) と (6) を代入して

$$\begin{aligned}
 &\cos r \sin r \\
 &= \sqrt{\frac{2\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 + \cos \ell)}} \sqrt{\frac{\left(1 - \cos \ell\right)\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(1 + \cos \ell\right)\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 - \cos \ell)\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}}{\left(1 + \cos \ell\right)\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}$$

よって (8) の分子は

$$2\sqrt{\frac{2\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 - \cos \ell)\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(1 + \cos \ell\right)}}$$

となる. 分母の  $\sin \theta$  は (7) を代入する. これらから (8) は次のようになる.

$$\theta' = \frac{\sqrt{2\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)(1 - \cos \ell)\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \cos \frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos \ell - \cos \frac{2\pi}{n}\right)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2(1 - \cos \ell)} \\
 &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \ell}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

ここで半角の公式から

$$\sin \frac{\ell}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \ell}{2}}$$

つまり

$$\sqrt{1 - \cos \ell} = \sqrt{2} \sin \frac{\ell}{2}$$

であるので (9) 式は

$$\theta' = 2 \sin \frac{\ell}{2} \quad (10)$$

となる.

$$S(r) = n\theta + \pi(2 - n), \quad L(r) = n\ell$$

であるので

$$\frac{dS(r)}{dr} = n\theta', \quad \ell = \frac{L(r)}{n}$$

である. よって (10) の左辺は

$$\theta' = \frac{1}{n} \frac{dS(r)}{dr}$$

右辺は

$$2 \sin \frac{L(r)}{2n}$$

となるので定理の式が得られる.

証明終わり.



系 1 の証明

テーラー展開から

$$\sin \frac{L(r)}{2n} = \frac{L(r)}{2n} - \frac{1}{3!} \left( \frac{L(r)}{2n} \right)^3 + \dots$$

であるが、もし球面凸正多面体が十分小さければその周の長さ $L(r)$ も十分小さくゼロに近い値となる。このとき $(L(r))^3$ 以降をゼロと近似すると

$$\sin \frac{L(r)}{2n} \approx \frac{L(r)}{2n} \tag{11}$$

とすることができ、定理の式は

$$\frac{dS(r)}{dr} \approx 2n \frac{L(r)}{2n}$$

となり系の式を得る。

証明終わり

注意

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

から角度がほとんどゼロに近ければ

$$\sin x \approx x$$

であるから(11)を得る。ここからも系の式を得ることができる。

#### 4. 今後の課題

定理の証明からわかるように、使うのは三角関数のみである。系の証明で使うサイン関数のテーラー展開の式は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

からも理解できる。球面三角形に対する余弦定理と正弦定理の証明にはベクトルを使う。しかしこれらすべて高校の内容である。よって球面幾何学の直線などの概念を理解すれば高校生でも理解できる内容である。

このノートでは球面幾何学での正凸多面体について扱った。これをさらに一般化すると次のようなことが考えられる。

- (1) 正多角形でない図形に対しては系 1 のような近似式は成り立つか。一般の $n$ 角形では計算が大変であるが、(正三角形とは限らない) 球面三角形ではできないか。
- (2) 非ユークリッド幾何学には他に双曲幾何学と楕円幾何学がある。そのような幾何学では今回得られたような性質は成り立つであろうか。
- (3) 双曲幾何学では、交わらない直線を無数に引くことができる。また三角形の内角の和は180度よりも小さくなる。さらに双曲幾何学では三角関数の代わりに $\sinh \theta, \cosh \theta$ などの双曲関数が使われ、これらに対しても正弦定理や余弦定理が存在する。これらを使い定理3のようなことが証明できるであろうか。この場合には参考文献2)も役立つであろう。
- (4) 高校の内容からは大きくはみ出すが、多様体上ではどうだろうか。このときにはガウス・ボンネの定理を微分することになるが、この先は大学数学での曲面論の話となる。

(1)~(3)については高校の範囲での数学で考えられる内容である。これらを教員の指導の下で研究することにより多くの学生の興味を引くのに役立つであろう。また数学に興味を持つ学生が独自に考えることにより、さらに数学を進んで学ぶきっかけにもなるであろう。大学への数学にスムーズに入っていけるトピックスでもある。

#### 参考文献

- 1) 中岡稔:『双曲幾何学入門 線形代数の応用』サイエンス社, 1993年
- 2) 深谷賢治『双曲幾何』岩波書店 2004年