# 新しい離散化解析法とその応用

風間悦夫*　北山光也**　川井忠彦***

# A New Discrete Analytical Method and Application for Non-Structural Problems

Etsuo KAZAMA, Mitsunari KITAYAMA and Tadahiko KAWAI

At first, the relation between nodeless finite element method and Hellinger-Reissner principle are explained in this paper. In the present method, domain to be analyzed is divided to nodeless elements isolated as free bodies. Nodeless element has the relative actions to neighboring elements. The functions denoted by Taylor's series are defined for each element independently. Applying a variational principle derives a set of simultaneous vector equations concerning parameters of the functions for each element. It is secondary purpose in this paper to show that the same procedure be able to develop into analytical method for non-structural problems, for instance, thermal conduction problem.

キーワード：ノードレス法，ハイブリッド法，Hellinger-Reissnerの変分原理

## 1. はじめに

有限要素法，差分法など選点法に伴う問題を解消するために，1996年以来下に示す川井の研究目標を実現するべく協力した．

(ⅰ) メッシュ分割に伴う困難を解決するための
　　ノードレス要素法の開発

(ⅱ) 解の下界を得るための応力法の復活

(ⅲ) FEMの変分学的基礎の再検討

機械工学の分野では，圧延，プレス成形，ロボットの関節などを始めとする接触問題が多い．熱交換機，電気・電子装置における電磁界の場なども同様である．従来の有限要素法は解析領域をメッシュ分割したときに要素同士がノードを共有するためにネット状に繋がった連続体になる．これが従来の有限要素法を用いて接触問題を解析することを困難にしている．(ⅰ)の目的は接触問題等不連続体の場を解析するための要素を開発することである．(ⅱ)の目的は低コストでシミュレーションしたときに応力値あるいは変形を高めに評価する応力法を復活し安全に設計するツールを開発することである．(ⅲ)このような目的のために川井は変分学的手法により離散化解析理論を再検討した．

* 機械工学科教授
** 機械工学科助手
*** 東京大学名誉教授

原稿受付　2002年5月17日

## 2. ノードレス法と変分原理の関係

図1のように自由物体として完全にアイソレートされた要素同士の変位と応力の連続性を変分学の手法で実現する．Hellinger と Reissner は Lagrange 乗数を導入して変位境界条件を付帯条件として組込んだ下の汎関数を発表した．

$$\Pi_{HR}(u_i)=\int_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{p}_i u_i\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{t}_i u_i dS - \int_{S_u}\lambda_i(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{1}$$

ここに，$\varepsilon_{ij}$：ひずみテンソル，$u_i$：変位成分

$\sigma_{ij}$：応力テンソル，$S=S_u+S_\sigma$

$S_u$：変位境界，$S_\sigma$：応力境界

$\bar{u}_i$：規定変位，$\bar{t}_i$：規定境界力，$\bar{p}_i$：規定物体力を表す．

要素の表面を外部境界と内部境界に分ける．要素と要素が接する境界は内部境界と呼ぶことにする．内部境界は変位と応力の同時に規定される境界で

ある．応力は下の構成式に従ってひずみの関数であるものとする．

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

(1)は Hellinger-Reissner の原式に変位-ひずみ関係，応力-ひずみ関係を導入し変位仮定の汎関数 $\Pi_{HR}$ に変換されている．また，(1)は内部境界のみの要素あるいは内部境界と外部境界を共に有する要素のいずれに対しても利用できる．
1998 年，川井は(1)を Gauss の発散定理を使って強形式に変換し，Lagrange 乗数 $\lambda_i$ を同定することによってノードレス要素の基礎式を発表した [1]．下に基礎式を導出する方法を述べる．

まず次式を用いてひずみを変位 $u_i$ から導き(1)に代入する．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3}$$

(1)の左辺の第 1 項を部分積分して Gauss の発散定理と下の Caushy の公式を用いる．

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \tag{4}$$

ここに，$t_i$ ：表面境界力，$n_j$ ：物体表面上の単位法線ベクトル　を表す．
(1)の第一変分を計算して下の停留条件を導く．

$$\delta\Pi_{HR} = 0 \tag{5}$$

(5)を具体的に書くと下のようになる．

$$\int_{S_u}(t_i+\lambda_i)\delta u_i dS+\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\lambda_i dS - \int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0 \tag{6}$$

いま，要素が内部境界のみを持つものとして(6)が成立つための必要条件を下に書く．

$$t_i + \lambda_i = 0 \; or \; \delta u_i = 0 \quad on\, S_u \qquad (7),(8)$$

$$t_i - \bar{t}_i = 0 \; or \; \delta u_i = 0 \quad on\, S_\sigma \qquad (9),(10)$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \; or \; \delta\lambda_i = 0 \quad on\, S_u \qquad (11),(12)$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \; or \; \delta u_i = 0 \quad in\, V \qquad (13),(14)$$

$u_i, \lambda_i$ は任意の許容関数を用いることができる．

(7),(8)において内部境界では $S_u$ 上で $\delta u_i \neq 0$ にすることができる．したがって(7)から次式を得る．

$$t_i + \lambda_i = 0 \;\rightarrow\; \lambda_i = -t_i \tag{15}$$

同様に(9)から次式が成立つ．

$$t_i - \bar{t}_i = 0 \tag{16}$$

(11),(12)において $S_u$ 上で $\delta\lambda_i \neq 0$ にすることができる．したがって(11)から次式を得る．

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \tag{17}$$

(13),(14)において $V$ 内で $\delta u_i \neq 0$ にすることができる．したがって(13)から次式を得る．

$$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \; in\, V \tag{18}$$

(15)を(6)に代入すると次式を得る．

$$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS - \int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS - \int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0 \tag{19}$$

アイソレートされた要素に対して(16),(17),(18)が成立つ必要があるがこれら三式と(19)とは等価である．(19)は外部境界条件を有する要素に対しても適用でき付帯条件を課す必要は全くない．
(19)の変分式をコンピュータに乗せやすい形に定式化すると，要素毎に状態ベクトルに関する方程式が得られ解析領域全体が連立ベクトル方程式として表せる [3]．ノードレス法の特徴を下に記す．

(A) ノードは全く不要になり，変分原理の効果によりアイソレートされた要素（図１）が変形後あたかもジクソーパズルのように連続体を形成する（図２）．

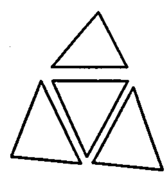

図１　三角形ノードレス要素

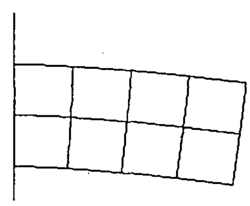

図２ 矩形ノードレス要素（変形後）

(B) 要素境界で応力分布が連続する（図３）．これは従来の有限要素法（アイソパラメトリック要素）に無い特長である．

(C)無節点であることにより図４のようにメッシュ分割が自由に実行できる[4].

(D)異なる自由度の要素を混合して用いることができる.

(E)メッシュ分割を細かくすると減衰振動的収束し上界が得られる(図 5).

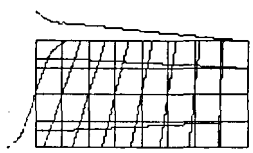

図３ せん断荷重を受ける片持平面板の応力($\sigma_x$)分布

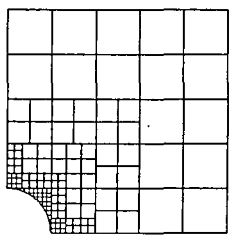

図４ 不規則メッシュ分割

平衡条件をアプリオリに満たす許容関数を(19)に用いると左辺の第３項の体積積分が消えるので下の Trefftz 型変分原理を得る.

$$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS-\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS=0 \tag{20}$$

## ３．ノードレス要素法の定式化

簡単化のために平面応力解析の場合を述べる.要素内の重心に局所座標系を設け下のように Taylor 級数で変位関数を表す.

$$\left.\begin{aligned} u&=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+\cdots \\ v&=b_1+b_2x+b_3y+b_4x^2+b_5xy+b_6y^2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(21)を次のようにベクトル表示する.

$$u=Na \tag{22}$$

ここに,

$$u=[u,v]^T \tag{23}$$

$$N=\begin{bmatrix} 1\ 0\ x\ 0\ y\ 0\ x^2\ 0\ xy\ 0\ y^2\ 0\cdots \\ 0\ 1\ 0\ x\ 0\ y\ 0\ x^2\ 0\ xy\ 0\ y^2\cdots \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$a=[a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ a_3\ b_3\ a_4\ b_4\ a_5\ b_5\ a_6\ b_6\cdots] \tag{25}$$

次に(2),(3),(4),(23)からひずみ,応力および境界力を導出しベクトル表示すると下のようになる.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= Ba \\ \sigma &= D\,\varepsilon = Ca \\ t &= \sigma n = Ga \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

要素 $i$ とそれを取り巻く隣接要素を記号 $j=1,2\cdots k$ で表す．要素 $i$ に関する式は(23),(26)を(19)に代入することにより次式のように表せる.

$$\delta a_i^T\left(M_i a_i+\sum_{j=1}^{k}M_j a_j+f_i\right)=0 \tag{27}$$

$\delta a_i$ は任意であるから要素 $i$ に対して次式を得る.

$$M_i a_i+\sum_{j=1}^{k}M_j a_j+f_i=0 \tag{28}$$

$a_i$ は要素 $i$ の未定係数ベクトルである．各要素に(28)が成立つので全領域は連立ベクトル方程式で表せる.

(1)を直接用いる場合は Lagrange 乗数は下のように独立な未知数として扱う.

$$\begin{aligned}\lambda_i &= r_{i1}+r_{i2}s+r_{i3}s^2+\cdots \\ &= H_i r_i\end{aligned} \tag{29}$$

ここに, $H_i=[1\ s\ s^2\cdots]$ (30)

$$r_i=[r_{i1}\ r_{i2}\ r_{i3}\cdots]^T \tag{31}$$

$s$ ：要素境界線に沿って設けた座標系を表す.

要素 $i$ を取り巻く Lagrange 乗数を $n=1,2\cdots m$ とすると要素 $i$ に関する方程式は次式になる.

$$M_i a_i+\sum_{n=1}^{m}M_n r_n+f_i=0 \tag{32}$$

Lagrange 乗数をこのように利用した方法をハイブリッド法と呼ぶことがある．図３はハイブリッド法を用いてせん断荷重を受ける片持平面板を解析した場合の応力分布を表す．図５はハイブリッド法の収束性を表す．横軸の DOF は要素数×１要素当りの自由度である．ハイブリッド法は変位の上界が求まることを示している.

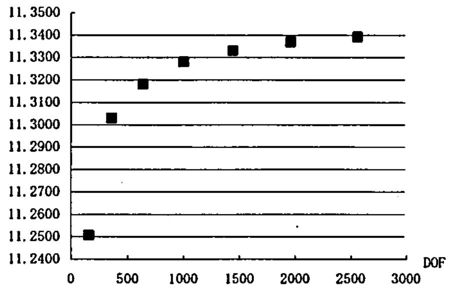


図５ 片持平板の最大変位の収束性

## 4. 非構造分野へのノードレス要素の応用

ノードレス法の非構造分野への応用を述べる．応用例として下の熱伝導方程式 (Poisson の方程式) を使う．

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\left(\kappa_{ij}T_{,j}\right)_{,i}+\dot{Q}\quad in\,V \tag{33}$$

フーリェの法則は次式で表せる．

$$\varphi_i=-\kappa_{ij}T_{,j} \tag{34}$$

ここで

$$\overline{q}=c\rho\frac{\partial T}{\partial t}-\dot{Q} \tag{35}$$

(34), (35) を用いて(33)を書き直し下の Poisson の方程式として扱うことにする．

$$\varphi_{i,i}+\overline{q}=0 \tag{36}$$

境界条件は単純化して下の２種類のみとする．

$$\left.\begin{aligned} T-\overline{T}&=0 & on\ S_D\\ \varphi_n-\overline{\varphi}_n&=0 & on\ S_N\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ここに，$c$：比熱，$\rho$：密度，$\dot{Q}$：内部発熱率

$T$：温度，$\overline{T}$：規定温度　$\varphi_i$：熱流速

$\overline{\varphi}_n$：規定熱流速　$\kappa_{ij}$：熱伝導率テンソル

$S=S_D+S_N$，　$S_D$：温度規定境界

$S_N$：熱流速規定境界を表す．

下の汎関数の変分を考える．

$$\Pi(T)=\frac{1}{2}\int_V\varphi_iT_{,i}dV-\int_V\overline{Q}\,TdV-\int_{S_N}\overline{\varphi}_iTdS+\int_{S_D}\lambda\left(T-\overline{T}\right)dS \tag{38}$$

ここに，$\lambda$：Lagrange 乗数である．
(38)の第一変分をとり部分積分を行って Gauss の発散定理を導入した式を零と置くと次式を得る．

$$\int_{S_D+S_N}\varphi_{,n}\delta TdV-\int_V\varphi_{i,i}\delta TdV-\int_V\overline{Q}\,\delta TdV-\int_{S_N}\overline{\varphi}_i\delta TdS+\int_{S_D}\lambda\delta TdS+\int_{S_D}\left(T-\overline{T}\right)\delta\lambda dS=0 \tag{39}$$

(39)から Lagrange 乗数を同定し消去する．さらに境界条件および場の条件を考慮すると次式を得る．

$$-\int_{S_D}\left(T-\overline{T}\right)\delta\varphi_n dS+\int_{S_N}\left(\varphi_n-\overline{\varphi}_n\right)\delta TdS-\int_V\left(\varphi_{i,i}+\overline{Q}\right)\delta TdV=0 \tag{40}$$

図６は(40)により内部発熱が０,左端の温度を５０，右端を 100，上下端を断熱境界に指定した正方形板（メッシュ分割数 10×10）の 2D 熱伝導解析の結果である．

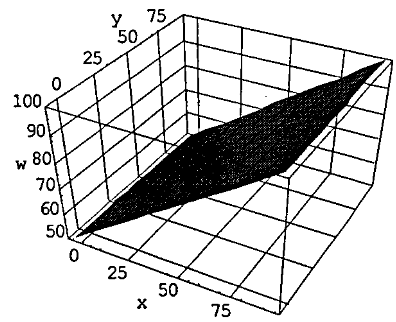


図６ ノードレス要素による２D 熱伝導解析

## 5. あ と が き

ノードレス要素と変分原理の関係および定式化を示した．全く同じ手法が非構造分野においても利用できることを示した．新しい離散化解析法が近い将来，接触問題など不連続体力学の解析に応用されることを確信する．

## 参 考 文 献

1) 川井：固体力学問題の新しい離散化解析法の開発，日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集，Vol.A,No.98-5,pp.25-28,1998

2) Kawai, T: The force Method revisited, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.47, pp275-286, 2000

3) 風間，北山，川井：二次元弾性問題の新離散化解析 －TK法の応用－，日本学術会議50周年記念第48回理論応用力学講演会講演論文集，(1999.1)347-348

4) 北山，風間，川井：新しい離散化解析法の実用化に関する研究（Ⅱ）－メッシュ分割問題を中心として－，日本計算工学講演会講演論文集 4(1) (1999) 149-152