

凍結地盤の数値解析に関する考察

遠藤典男* 三井康司**

Some Approaches to Numerical Analysis of Frozen Soil

Norio ENDOH and Yasushi MITSUI

During the winter season in cold area and mountain area, exchanging from pore water to ice, foundation volume increase. Expanding freezing area into foundation the height of surface rise. These mechanical behaviors call on heaving phenomenon, and that influence structures on surface.

In this paper, we evaluate increasing volume by freezing phenomena numerically, appreciate height of surface rise and the pressure which act on structures.

キーワード：非定常熱伝導解析，凍結領域評価，凍結膨張，熱応力解析

1. 結 語

冬期間，寒冷地や山岳部において地盤中の間隙水が凍結し氷へと相対変化する凍結現象により，地盤の体積が膨張することになる．地盤内部へと凍結現象が拡大するにつれ，地表面の地盤高が上昇する凍上現象が生じる．また変形を拘束された地盤や構造物などには土圧が生じることになるが，このような土圧は凍結土圧と呼ばれている．

地盤が凍結する際，凍結地盤では間隙水が凍結するとともに未凍結領域の境界付近から凍結領域へと間隙水が移動する．この原因として1) 凍結領域において間隙水が氷結晶化することに起因し見かけ上の含水比が減少しサクシオンが増加するための毛管上昇促進，2) 温度差による水蒸気の移動，3) 間隙水が塩を含有する場合には，氷晶や吸着水に塩が含有されないため，非結晶水である自由水の塩分濃度が高まることに起因して，塩の濃度が異なる未凍結地盤と凍結地盤との間に働く浸透圧現象，が考えられる．本解析では水分移動に関する考慮は行わないが，凍結領域では空隙が全て間隙水で満たされたと仮定し凍結膨張量の算定を行う．また，凍結地盤の空隙全てに間隙水が満たされ，その全てが氷へと変化すると考えると，決して小さくない凍結膨張を

生じることになる．

凍上現象，凍結土圧は冬期間のみの季節的な現象ではあるが，構造物に与える影響が甚大である場合には，耐用年数以前に構造物として十分な機能を果たすことができなくとも考えられ，設計時において，あるいは維持管理の際重要な要因となる．地盤凍結に対し設計時の対処法としては，当該地域の凍結深さを直接測定する方法や凍結指数： F ($^{\circ}\text{C}\cdot\text{日}$ ；月平均気温とその月の日数の積)を用いて凍結深さ： $z(\text{cm})=c\sqrt{F}$ (c ：定数)を算定しているが地形条件などが考慮されることはない．

これらのことを勘案し，本分では有限要素法による非定常熱伝導解析を行い凍結地盤の拡大状況を把握したうえで，地盤中の間隙水が氷へと相態変化することに起因する凍結膨張量を定量的に評価し，構造物に作用する凍結土圧，地表面における凍上量を評価せんとしている．

ここで，地盤中の間隙水が凍結するためには周辺の外気温が零度以下となる必要があるが，気温は1日のうちでも変化するため，常に零度以下になっているとは限らない．しかしながら，地盤中の温度変化は，地盤の熱容量，熱伝導率を勘案すると明白ではあるが，1日というサイクルの間ではほとんど一定となっており，地盤中の温度変化は主として季節的，すなわち日平均気温に依存するところが大きい．このため，非定常熱伝導解析において外気温を境界として取り扱う際には，冬期間における日平均気温

* 環境都市工学科助教授

** 信州大学教授 工学部社会開発工学科

原稿受付 2001年9月30日

を、地盤と大気が接触する境界において伝熱境界として設定した。また、地盤を離散化する際、地表面から遠く離れた深い地中での境界は、大気の温度の影響がないものと考え、同解析における温度規定境界条件として設定した。

2. 数値解析手順

2-1 非定常熱伝導解析

図1に示す凍結-未凍結領域を考える。凍結領域の温度は T_- であり、未凍結領域では T_+ である(下付き添え字は温度のプラス、マイナスを意味する)。ここで、全体座標系 (x, y) における境界 Γ で囲まれた領域 Ω に対して、2次元非定常熱伝導解析の支配方程式は、発熱を考えない場合次式で与えられる。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1)$$

ここで、 $T = T(x, y, t)$ は時間、空間の関数で与えられる温度であり k_x, k_y は熱伝導係数である。また、 ρ は密度、 c は比熱である。初期条件、境界条件は以下のように与えられる。

○ 境界条件

・境界 Γ 上に温度規定 \bar{T} がある場合：

$$T = \bar{T}$$

・境界 Γ 上に熱流束規定 \bar{q} がある場合：

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}$$

ただし、 $\{n\}$ は熱流束境界における外向き単位法線ベクトルである。

・境界 Γ 上に熱伝達規定 T_c がある場合：

$$q = \alpha(T - T_c)$$

ただし、 α は地表面における熱伝達係数、 T_c は外部温度である。

次に、ガラーキン法により空間的な離散化を行うと、式(1)は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[k_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + k_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] \{T\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho c [N]^T [N] \left\{ -\frac{\partial T}{\partial t} \right\} d\Omega \\ & = - \int_{\Gamma} [q] [N]^T d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $[N]$ は要素内任意点の温度と節点温度を補

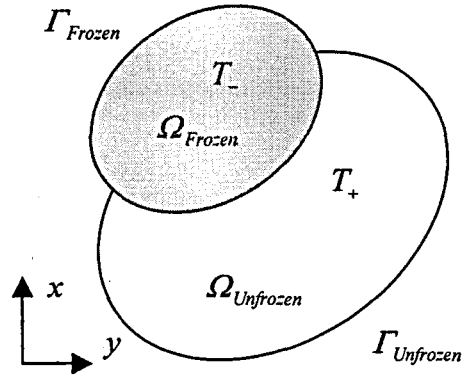


図1 凍結-未凍結領域の概念図

間するための内挿関数マトリクスである。式(2)をマトリクス表示すると式(3)となる。

$$[K]\{T\} + [C]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \{q\} \quad (3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} [K] = & \int_{\Omega} \left[k_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} \right. \\ & \left. + k_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] \{T\} d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \rho c [N]^T [N] \left\{ -\frac{\partial T}{\partial t} \right\} d\Omega \quad (5)$$

$$\{q\} = - \int_{\Gamma} [q] [N]^T d\Gamma \quad (6)$$

であり、 $[K]$ は熱伝導マトリクス、 $\{T\}$ は節点温度ベクトル、 $[C]$ は熱容量マトリクス、 $\{q\}$ は熱流束ベクトルである。

次に、式(3)をクランクニコルソン法により時間に関して離散化すると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} [K_2] + \frac{1}{\Delta t} [C_2] \right) \{T(t_2)\} \\ & = \left(-\frac{1}{2} [K_1] + \frac{1}{\Delta t} [C_1] \right) \{T(t_1)\} + \{q\} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。なお、 $\Delta t = t_2 - t_1$ であり $t_1, t_2 (t_2 > t_1)$ は時刻を表しており、また $[K_i], [C_i]$ は時刻 i における熱伝導マトリクス、熱容量マトリクスである。

2-2 熱応力解析

まず、有限要素内の任意点における全ひずみ $\{\epsilon\}$ は節点変位 $\{u\}$ を用いて次式のように表すことができる。

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (8)$$

ただし、 $[B]$ は $\{\varepsilon\}$ と $\{u\}$ を関連付けるためのマトリクスで、要素内任意点の変位と節点変位を補間するための内挿関数マトリクスで表される。また、全ひずみ $\{\varepsilon\}$ は弾性ひずみ $\{\varepsilon_e\}$ と熱ひずみ $\{\varepsilon_T\}$ との和として表されるため、次式が得られる。

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_e\} + \{\varepsilon_T\} \quad (9)$$

弾性変形限度内における応力とひずみの関係はフックの法則により与えられるため、応力-ひずみマトリクスを $[D]$ とすると、

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon_e\} \quad (10)$$

と表すことができる。式(9)を式(10)に代入すると熱弾性問題における応力とひずみの関係が得られる。

$$\{\sigma\} = [D]\{\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}\} \quad (11)$$

ここで、仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta\{u\}^T \{f\} d\Omega + \int_{\Gamma_o} \delta\{u\}^T \{R\} d\Gamma_o \end{aligned} \quad (12)$$

と表される。ただし、 $\{f\}$ は領域内部に作用する物体力であり、 $\{R\}$ は境界上に作用する表面力である。式(12)に式(11)を代入すると、

$$\begin{aligned} & \delta\{u\} \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \cdot \{u\} \\ &= \delta\{u\} \int_{\Omega} \{f\} d\Omega \\ &+ \delta\{u\} \int_{\Gamma_o} \{R\} d\Gamma_o \\ &+ \delta\{u\} \int_{\Omega} [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

となり、仮想変位 $\delta\{u\}$ の一般性を考慮すると熱応力問題に対する有限要素方程式が次式のように与えられる。

$$[K]\{u\} = \{f_r\} + \{f_o\} + \{f_T\} \quad (14)$$

ただし、

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (15)$$

$$\{f_o\} = \int_{\Omega} \{f\} d\Omega \quad (16)$$

$$\{f_r\} = \int_{\Gamma_o} \{R\} d\Gamma_o \quad (17)$$

$$\{f_T\} = \int_{\Omega_F} [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} d\Omega_F \quad (18)$$

なお、式(17)において Γ_o は表面力が作用する境界を、式(18)において Ω_F は凍結領域を意味する。

2-3 凍結現象に伴う物体力

式(18)で導出された $\{f_T\}$ は温度変化、すなわち凍結現象に伴う体積変化に起因する物体力と考えることができるため、本節で詳細な定式化を行う。まず凍結領域と未凍結領域の境界近傍では、先に考察したように間隙水圧の低下および間隙水中の塩分濃度の変化による浸透圧現象によりなどにより、未凍結領域からの水分移動が生じ飽和度は $S_r = 100\%$ 、もしくはそれ以上、すなわち地盤の間隙が全て水で満たされるものと考えられる。このため、間隙を満たす水は零度以下になると氷へと変化し、これに伴い10%の体積膨張が生じることになる。凍結領域の拡大方向は、現在凍結している領域の法線方向へと拡大してゆくと考えられることができるため、空隙(地盤中に含まれる空気)の体積を V_a とし、全体座標系 (x, y) と同一の原点を有する極座標系 (r, θ) により $\{\varepsilon_T\}$ を表すと次式のようになる。

$$\{\varepsilon_T\}^T = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}\} = \{0.1 \cdot V_a, 0, 0\} \quad (19)$$

前述の有限要素方程式における $[D]$ 、 $[B]$ 等は全体座標系で表されているため、極座標系で表されている $\{\varepsilon_T\}$ を全体座標系へと変換すると

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_T\}^T &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \\ &= \{\varepsilon_r \cdot \cos^2 \alpha, \varepsilon_r \cdot \sin^2 \alpha, 0\} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ただし、 α は全体座標系の x 軸と局所座標系の θ 軸のなす角度である。式(20)を式(18)に代入することにより、凍結膨張により生じる凍結土圧を等価節点力に変換できることになる。

2-4 凍結領域の算定

非定常熱伝導解析を行い、ひとつの要素で 0°C 未満の節点温度と 0°C 以上の節点温度とが算出された場合には、その要素には凍結領域と未凍結領域が存在することになる。したがって熱応力解析を行うに際し、凍結領域の大きさから凍結膨張量を算出するため要素内での凍結領域を算定する必要がある。節点温度と凍結領域の関連について言及する。なお、図2に節点温度と凍結領域の関連を示す。本解析で適用した4節点アイソパラメトリック要素において、一つ以上の節点で 0°C 未満となった場合には、その他の節点温度から温度が 0°C となる座標を比例計算により算出し、凍結領域の面積を算出する。ここで、

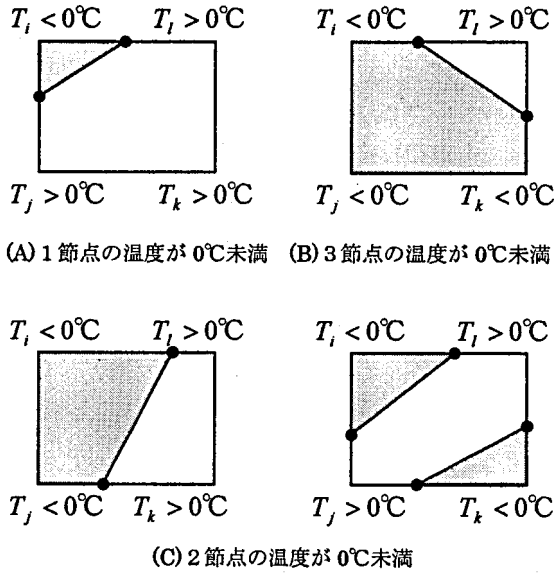


図2 節点温度と凍結領域の関係

図2(c)に示すような状況，すなわち 0°C 以下なった2つの節点が隣り合わない場合（1つの要素内で2つの凍結領域が存在する場合）には，各々の両隣の節点温度を用いて先に示した方法を2度繰り返して凍結領域の算定を行うことになる。

さらに，要素内で未凍結領域と凍結領域が存在するような場合，要素の物理定数の取り扱いが問題となる．本解析ではアイソパラメトリック要素の領域積分を行う際の積分点における温度を算出し，物理定数の差別化を計る。

3. 数値解析例

数値解析例として，山岳部に切土盛り土して道路を建設した場合の凍上量および凍結土圧の算定を行う．図3に解析モデルの形状寸法を示す．幅員6mの道路を仮定し，解析対象領域は水平方向，鉛直方向ともに20mとしたが，凍上現象の影響が大きく反映されると考えられる道路下部を，上部に比し解析対象として大きく設定している．なお，斜面の勾配を 45° とし，切土盛り土した斜面にはコンクリート擁壁を設置したものと仮定した．また，同図に非定常熱伝導解析における境界条件および初期条件を示す．解析対象とする地盤が巨視的な観点では均質であると仮定すると x 方向， y 方向の熱伝導係数は等しいとみなすことができるため $k_x = k_y = k$ とし解析している．初期条件に関しては，地中の平均温度を勘案し全節点で $T_0 = 8^{\circ}\text{C}$ とした．境界条件に関しては，大気と接する地表面で伝熱境界とし，外気

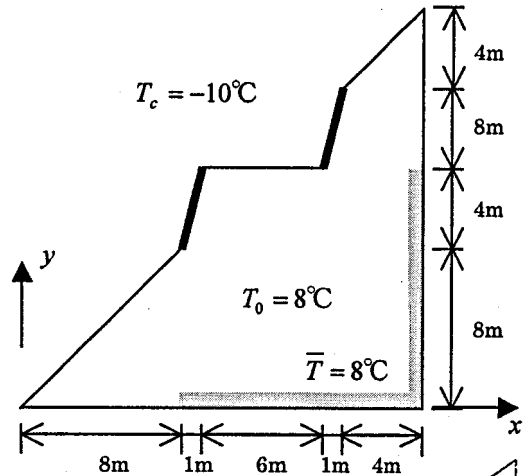


図3 解析対象領域

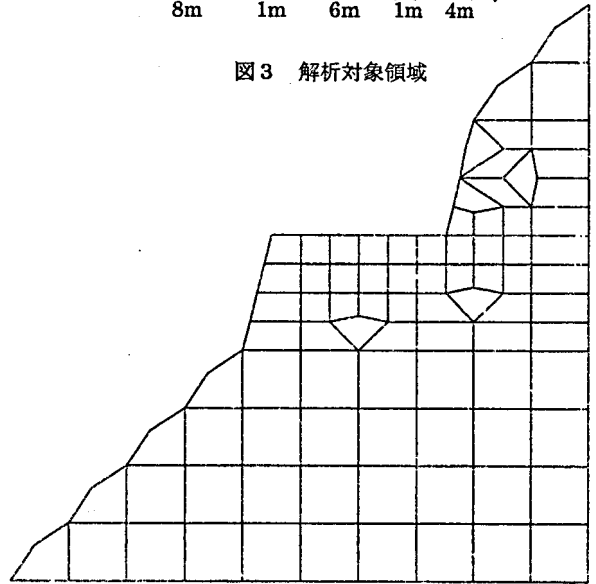


図4 離散化状態

の日平均温度を $T_c = -10^{\circ}\text{C}$ と設定した．また，外気温の影響がほとんどないと考えられる地中深く（図3における網掛け部分）では温度を規定し，地盤の初期温度と同一となる $\bar{T} = 8^{\circ}\text{C}$ とした．

図4に離散化状態を示す．熱伝導解析，熱応力解析ともに4節点アイソパラメトリック要素を適用し，要素数86，節点数112により離散化している．熱応力解析における境界条件は，対象領域右下隅の1点のみを x 方向， y 方向拘束とした．

表1に熱伝導解析，熱応力解析時に適用した物理定数を示す．ここで，表1に示されていない地盤の基本的な物理量に関して言及する．まず，土粒子の比重を $G_s = 2.65$ ，絶乾状態での地盤の単位体積重量を $\gamma = 1.70 \text{ t/m}^3$ ，単位容積 (1 m^3) あたりの地盤の空隙を $V_a = 0.36 \text{ m}^3$ とし，未凍結領域における含水量を $V_w = 0.26 \text{ m}^3$ と仮定した．本解析では飽和度

表1 数値解析時の物理定数

	未凍結領域	凍結領域
熱伝導解析	熱伝導係数: k [kcal/m·hr·°C]	1.3
	比重: ρ	1956.0
	熱容量: c [kcal/°C]	0.32
	熱伝達率: α_c [m/°C]	5.0
熱応力解析	ヤング率: E [kgf/m ²]	40.0
	ポアソン比: ν	0.3

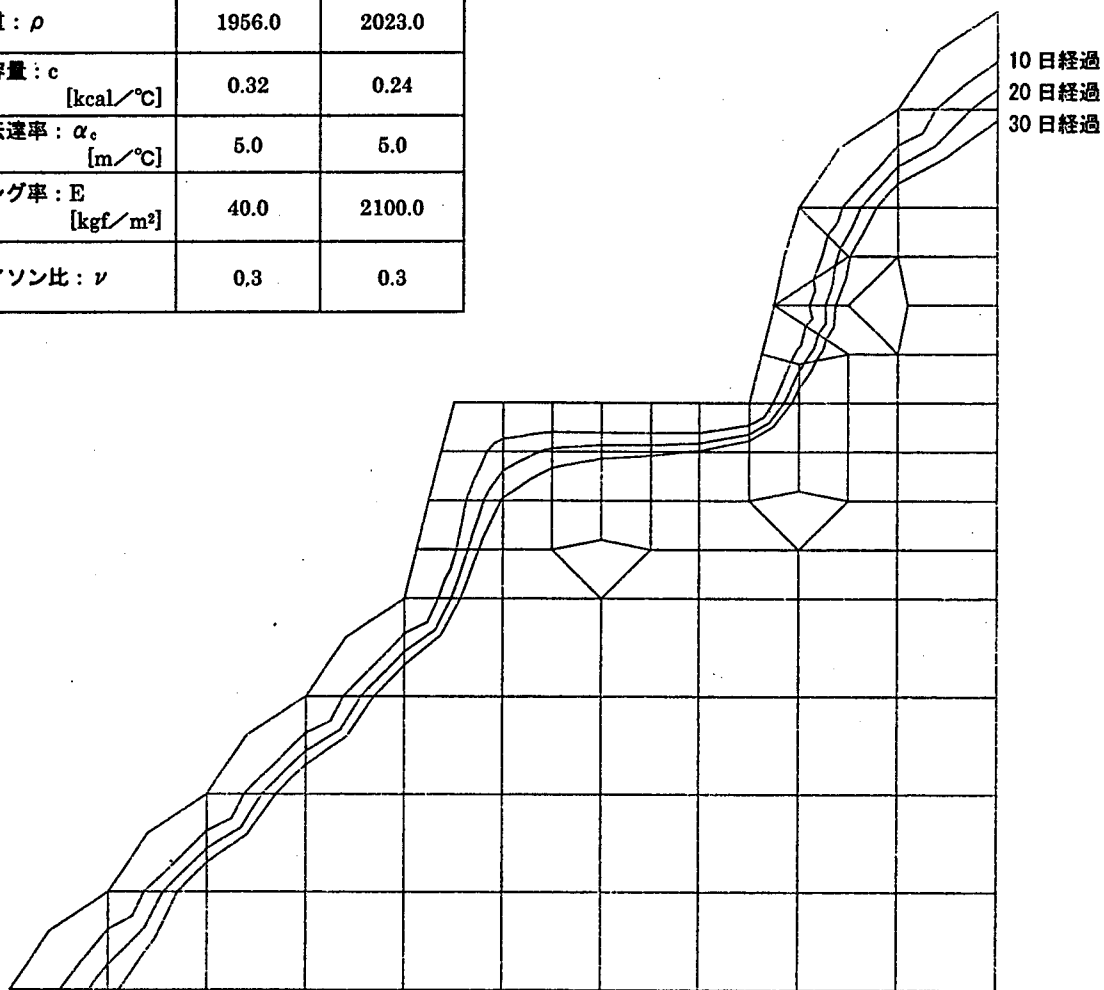


図5 非定常熱伝導解析による凍結領域の算定

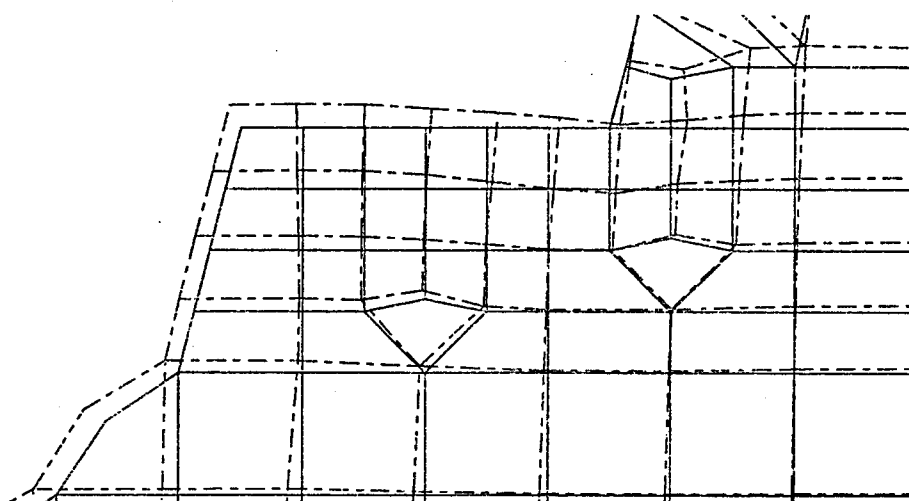


図6 地表面における凍上量

が 100% となった状態で凍結膨張量を算出するため、未凍結領域から凍結領域へ単位体積当たり 0.10m^3 の間隙水が移動することにより $S_r = 100\%$ になる。間隙水が凍結—未凍結領域の境界近傍へと移動するとともに凍結してゆくため、境界近傍および凍結領域における飽和度は未凍結領域における飽和度より大きな値となっている。なお、上記条件の下で未凍結領域の含水比と飽和度を計算すると各々 $w = 15\%$ 、 $S_r = 72\%$ となる。

図 5 に非定常熱伝導解析により算定された、解析開始より 10 日、20 日、30 日後の凍結領域を示す。時間の経過に伴い凍結領域が拡大してゆく様相がよくわかる。解析開始後 30 日で、地表面より約 1m の凍結領域が算出された。ここで、道路建設を想定し盛土を行った角部では盛土した斜面と道路表面での伝熱境界の影響が顕著に現われるため、地下 2m 程度までの地盤凍結が算出された。また、切土した角部近傍では、道路の垂直・水平方向に地盤が存在しているため伝熱境界の影響が他の部分より少なく、0.5m 程度の地盤凍結が算定され、道路の幅員方向では不均一な凍結膨張が予想される。このため、道路下部の路床・路盤の設計に際し注意を要する部分である。なお、地表面と地盤内境界を想定した部分 ($x = 0\text{m}$ 、 $y = 0\text{m}$ と $x = 20\text{m}$ 、 $y = 20\text{m}$) では凍結深さが大きくなっている。これは $y = 0\text{m}$ 、 $x = 0 \sim 8\text{m}$ と $x = 20\text{m}$ 、 $y = 12 \sim 20\text{m}$ では、境界条件として法線方向の熱流束を $\bar{q} = \partial T / \partial \{n\} = 0$ と指定しているための誤差と考えられるが、本モデルで設定した構造物に対する影響は微小なものである。

図 6 は図 5 において算定された凍結領域を基に凍結膨張量を算出し、等価節点力に換算した後、凍上量を算定したものである。道路建設を想定した地表面では 1cm～13cm 程度の鉛直方向変位が算定され

ており、また水平方向にも盛土側で 5cm (左側へ変位)、切土側でも 1cm 程度 (右側へ変位) 変位しており、盛土側での相対変位は約 6cm にも達している。このように道路を建設する地形条件により不均等な凍上量の発生は道路表面および道路下の路床・路盤に通行車両以外の外力を作用させることになる。また、融解後の間隙水の増加と融解した水分が下方へ移動することに起因する空隙量の増加による路面陥没などの危険性も生じる。さらに、年月の経過により繰り返される凍結—融解作用により路盤の物理的性質が変化することも考えられ、十分な維持管理上の対処が必要になる。

4. 結 語

本研究により得られた結論を述べると以下のようになる。

- ・非定常熱伝導解析により凍結深さを算出することにより、道路の路床・路盤の最適設計に用いることが可能である。
- ・数値計算により対象領域を離散化することにより、地形条件を加味した凍結深さ、凍上量を算出することができる。
- ・地盤性状を表す土粒子比重、含水費、飽和度を検討することにより、比較的容易に間隙水の移動量を算定することができる。

参 考 文 献

- 1) 三上隆・岡田正之・芳村仁：既設トンネルの外部断熱材の厚さの算定について、構造工学論文集 Vol.42A, pp.43-48, 1996.
- 2) 土質工学会編：土の凍結, 1982.
- 3) 遠藤典男・大上俊之・三井康司・草間孝志：境界—有限要素を用いた凍結地盤の解析, 境界要素論文集第 5 巻, pp.221-226, 1988.
- 4) 植下協・加藤晃：道路工学, 朝倉書店, 1982.