複素関数の指導について
——正則関数の導入方法——

前田善文*　小林茂樹**

Devices on Guidance of Complex Variable functions
—— Introduction of Regular Function ——

Yoshifumi MAEDA,　Shigeki KOBAYASHI

We have been teaching a theory of complex variable functions to the third-year students as mathematics B (consisting of two credits for a yearlong program) by use of a textbook published by Dainippontosho Publishing Co. Actually, we've been teaching just one credit of the two on the theory of complex variable functions. Such classes have been taught at two or three National Colleges of Technology so far.

In teaching complex variable numbers to them, we need to carefully select teaching contents, and devise ways of teaching this subject because we want to teach it to the lower classes in the future. Anyway, this is a study to help the students enrich, improve, and better understand their mathematical scholarship.

キーワード：複素数，複素関数，正則関数，指導の工夫

1．はじめに

本校においては，複素関数論の指導を３学年数学B(通年２単位)のうち半分の１単位(約30時間)分に当たる後期授業において大日本図書の教科書を使用して行っている．全国の高専から見ると希な例であり，全体でも３年生で複素関数論をすべて指導する高専は長野高専を含め２，３校である．

複素関数論を３年生に指導する上での困難点としては，次のことがらが挙げられる．

(1) １年生においては，複素数の定義や四則演算の計算練習をするだけであり，その後具体的に指導がなされていないため，極形式などの複素数の性質の指導に時間がとられ，複素数の級数や複素関数，複素関数の微分積分の指導に多くの時間をとることができない．

(2) 高専の授業においては，４年生のベクトル解析において線積分やグリーンの定理を指導するために，コーシーの積分定理の証明を３年生において指導することは難しい．グリーンの定理の証明を３年生の複素関数論に関する授業の中で指導してもよいが，時間的に無理がある．

(3) 虚数は現実の数ではないという印象から学生は必要性を感じていないことと，実数関数とは違いグラフを描くことができないため，学生にとって内容を理解しにくいところがある．

３年生に限られた時間内で複素関数論の指導をするためには，学生にとって理解し易い教材の配列と指導内容の精選，指導の方法を工夫する必要がある．そのためにも，低学年における複素数についての指導も再検討する必要がある．本稿では複素数および複素関数に対する学生の理解を深め，学力を充実させるための指導方法について論ずる．

2．複素数の指導の現状と課題

2－1　本校における指導の現状

(1) 基礎数学(１年生数学A・B)の指導

基礎数学の「数と計算」の中で，新しい数 $i^2=-1$ として虚数単位 i を定義し，複素数の四則演算と絶対値について指導を行っている．指導時期は前期中間試験直前である．教科書は３ページ強と取り扱いは簡単に済ませているという印象である．担当は高校を退職された非常勤の先生にお願いしている．

「２次方程式」の分野では $\sqrt{\ }$ の中が負の数となった場合に虚数単位 i を用いるだけで，複素数(虚数)

* 一般科教授

** 一般科講師

原稿受付　1999年10月29日

の指導とはなっていない．また，「２次関数」の分野においても，グラフの共有点については実数だけを扱うので虚数解は取り扱わない．共有点の個数を調べるために判別式を用いるだけである．

２学年当初に実施している「１学年数学復習テスト」において，「 $\frac{1+2i}{1-i}$ を $a+bi$ の形にかけ」という問題を毎年出題している．平成７年度までは40%以上の正答率であったが，ここ４年間は30%以下の正答率に落ち込んでしまっている．平成７年度以前と指導状況は同じと思われるが，学生の意欲や意識変化と計算練習の不足が感じられる．２年生においては複素数を指導する内容がないため，このような状況で複素関数論を指導しなければならず，指導の困難さがある．

(2) 微分積分Ⅱ（３年生数学Ａ）の指導

マクローリン展開の指導後にオイラーの公式と実数から複素数への関数の微分について指導している．応用として，sin，cos の指数関数での表示やド・モアブルの公式について扱っている．指導時間は１時間半～２時間である．

(3) 応用数学（３年生数学Ｂ）の指導

応用数学の教科書56ページにわたって，大学の工学部で教える内容と同程度（理論面でいくぶん少な目ではあるが）指導することになっている．本稿で指導を検討する中心的な部分である．

２－２　高等学校における指導の現状

高等学校における複素数についての指導を調べてみると，以前の教育課程とは違って，１年生で指導する数学Ⅰと数学Ａには複素数の内容はまったくなく，２次方程式についても２次関数の x 軸との共有点や２つのグラフの共有点を求めるために用いられているだけであり，判別式も共有点の存在や接するための条件として導入されており，この分野では複素数の導入がなされていない．２年生の数学Ｂの「複素数と複素数平面」において，複素数の定義，複素数の四則演算，２次方程式の解の判別式，複素平面，絶対値，偏角，極形式，複素平面における四則演算の図表示（乗法や除法の回転），ド・モアブルの公式，n 乗根，複素平面上での図形の方程式について，多くのページを割いて扱っている．高専の応用数学の教科書においては６ページ，基礎数学を含めてもわずか９ページ強である．教科書のページ数には関係なく，高専においても問題演習も含め時間をとって，ていねいな指導が必要であると思われる．

２－３　今後の指導についての提言

高等学校においては複素数を一括して一つの単元で集中して指導しているが，高専においては１年生で学習した後，数学では３年生まで複素数の内容が現れないが，関連する分野において少しずつ複素数について理解が深まるように指導する必要があると思われる．

１年生の指数関数と対数関数（数学Ｂ，後期初めに指導）の累乗根の分野において n 乗根は実数しか取り扱わないが，虚数まで含めて取り扱った方がよいと思われる．たとえば，８の３乗根は $x^3=8$ を満たす x であり $x=2, -1\pm\sqrt{3}i$ となるが，すでに因数分解や高次方程式を学習してあるので，問題はなく十分指導することができる．n 乗根は０以外の数に対して n 個存在し（n 次方程式の解が重複度まで含め n 個であることを再認識させる），n が偶数の場合は正の実数に対して，n 乗根は正の実数が１個，負の実数が１個，残りは虚数であること，また，n が奇数の場合は０以外の実数に対して，実数が１個，残りが虚数であることを，平方根や３乗根，４乗根の例から説明し，$\sqrt[n]{a}$ は n 個の n 乗根から１つに限定したものであることを指導する．このように指導してもこの章の流れを阻害することもなく，詳しくは３年生で n 乗根の性質について学習することを説明することによって，学生に虚数の存在を再認識させ，複素数の指導の流れの中で位置づけることができる．

また，三角関数（数学Ｂ，後期末に指導）の加法定理の分野において，sin，cos の加法定理を指導した後に複素数を簡単に復習し，複素平面と複素数の極形式を導入して加法定理の応用として，複素数の乗法や除法の複素平面における図形的な意味（点の回転移動にもふれることができる）とド・モアブルの公式を指導することにより，加法定理への理解も深まり，また，応用数学の複素関数論のスムーズな導入にも役立つと思われる．また，１年生の数学Ｂは時間的な余裕が多少あるため，オイラーの公式についても少し触れることができる．

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

複素数の乗法が偏角の足し算，除法が偏角の引き算となることと指数法則を関連させて，オイラーの公式の導入も可能である．以上の内容を３～４時間使って学年末の最後の授業で指導することができると考えられる．

２年生で線形代数の最後に時間が許す限り，次ののように複素数に関連したことがらを指導することもできる．複素平面上で，複素数の加法減法がベクトルで考えられることや，複素数の行列表現として，

実数 a を $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，純虚数 bi を $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ で，

複素数 $a+bi$ を $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

で表すことができることも取り扱う．複素数の極形式にあたる行列が回転の行列になっていることに注意させ，複素数の乗法や除法の複素平面における図形的な意味と対比させる．

さらに，行列の固有値についても，２次の正方行列の固有方程式の解が虚数解となる例において，固有ベクトルを求めて対角化を行い，行列Aに対してA^nを求める例を取り扱うことも複素数の有効性を認識させる意味において効果があると思われる．

例えば，　$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$に対して，固有値は$1\pm i$

それぞれの固有ベクトルは$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}$

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1+i)^n+(1-i)^n & -i\{(1+i)^n-(1-i)^n\}\\ i\{(1+i)^n-(1-i)^n\} & (1+i)^n+(1-i)^n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4} & \sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}\\ -\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4} & \sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}\end{pmatrix}$$

この例においては，A^4まで求めてA^nを推測することはできるが，nを用いて一つの式に表すことは難しい．この計算をした後に推測した結果と同じであることを確認することをしてみてもよい．この例では，複素数の極形式やド・モアブルの公式の復習にもなっている．また，計算途中では複素数を用いなければならないが，結果においては実数だけで表記できるよい例であり，複素数の必要性を学生に認識させることもできる．

複素関数論を指導する前の複素数に関する総復習として，３年生前期の数学Aにおいて指導する級数とマクローリン展開の分野において，オイラーの公式やド・モアブルの公式について再度指導を行い，複素数，複素平面の理解を深める．また，べき級数の収束半径については，複素平面上で収束を考えているための呼び方であることにも触れておく．

以上のように，次の流れを念頭に置き，指導をしていく．

①１年数学A（前期）の式と計算において複素数の導入（複素数の定義，複素数の相等，四則演算），２次方程式において，共役な複素数の説明
②１年数学B（後期初め）の累乗根において，n乗根の虚数までの指導
③１年数学B（後期末）の三角関数の加法定理において，複素平面，極形式，ド・モアブルの公式，オイラーの公式の導入
④２年数学A（後期末）の線形代数において，複素数の固有値・固有ベクトルの指導から，極形式やド・モアブルの公式の復習と複素数の必要性
⑤３年数学A（前期）の級数（関数の展開）において，オイラーの公式とド・モアブルの公式の復習，三角関数の指数関数表示の導入
⑥３年数学B（後期）の複素関数論

①～⑤は，３年生において複素関数論を指導しない場合においても専門科目との関連を考えると，早期にこの程度の複素数の内容について指導を行っておいた方がよいと思われる．

３．複素関数論の指導について

３－１　教材配列

学生にとって理解し易いと思われる教材の配列と指導内容の精選を次のようにした．

§１　複素数
　１・１　複素数の性質
　　複素平面，実部，虚部，絶対値，共役な複素数，オイラーの公式，和差の図示（ベクトル的表現）２点間の距離（絶対値），極形式，偏角，絶対値と偏角の性質，積商の図示（回転），ド・モアブルの公式，n乗根
　１・２　数列と級数
　　収束・発散，極限値，級数，べき級数，収束半径，ダランベールの判定法（比例判定法）
§２　正則関数
　２・１　複素関数
　　複素関数の定義，z平面w平面，連続，微分，導関数の性質
　２・２　正則関数
　　領域，単連結領域，正則の定義（通常の微分による定義とべき級数展開可能であるという定義），コーシー・リーマンの関係式，指数・三角関数の定義，ラプラスの偏微分方程式
　２・３　正則関数による写像
　　等角性
　２・４　逆関数
　　逆関数，リーマン面（多葉面），多価関数，主値，逆関数の微分
§３　積分
　３・１　複素積分
　　線積分，区分的に滑らか，積分路，実数を積分変数とする積分（置換積分），複素積分の性質，積分の絶対値の評価
　３・２　コーシーの積分定理
　　（単一）閉曲線，曲線の向き，コーシーの積分定理の意味，コーシーの積分定理の応用
　３・３　コーシーの積分表示

コーシーの積分表示の意味，導関数の積分表示(べき級数で証明)，リュービルの定理，代数学の基本定理

3・4 関数の展開

コーシーの積分表示の再証明(通常の方法)，テーラー展開，孤立特異点，ローラン展開

3・5 孤立特異点と留数

主要部，除去可能な特異点，真性特異点，k 位の極，留数，留数計算

3・7 留数定理

3－2 指導の具体的内容と注意点

前項の具体的内容のうち，特に重要と思われることがらについて述べることにする．項目番号は3－1と同じ番号を使用している．

1・1 複素数の性質

(1) 複素数の指導を見直した場合，大部分の内容はすでに3年までに学習してあるので，復習程度に指導する．

(2) n 乗根

1の n 乗根は $z=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ として扱い，一般の n 乗根 $z^n=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ については，

$z=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\rho+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\rho+2k\pi}{n}\right)$ と公式化してド・モアブルの公式の復習とする．

また，具体的な例として，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ の4乗根については，$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ とすると，4乗根が $\alpha,\ \alpha i,\ -\alpha,\ -\alpha i$ と計算できることも指導する．

1・2 数列と極限

(1) 数列

$|z|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}z^n=0$ を指導する．

(2) 級数

級数はべき級数だけを指導する(等比級数を基本として指導)．

一般のべき級数の収束半径の求め方については，ダランベールの方法(比例判定法)について指導する．

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ の収束半径は $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$．

(高専で取り扱うことを考えれば，上記の方法で十分であり，コーシー・アダマールの方法については省略する)

2・2 正則関数

複素関数が点 α で正則の定義については，

① 点 α の近傍で微分可能

② 点 α の近傍でテーラー展開可能

以上の2通りの定義を行う．②から①は収束半径の内部では項別微分が可能であることを説明しておけばよいとして，①から②は後に証明することを告げておく．

このように指導すると，後のコーシーの積分定理やコーシーの積分表示の意味が学生にとって理解し易くなり，導関数の積分表示も簡単に説明することができる．注意点としては，①から②の証明にはコーシーの積分定理とコーシーの積分表示が必要となるため循環論法に陥らないように指導することが重要である．

同時に実数関数と同様に，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \text{ のとき，} a_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

が成立することを説明しておく．

2・4 逆関数

リーマン面(多葉面)で逆関数を考える．紙を数枚重ねて，実軸負の部分を上下張り合わせたものを作り，学生に見せながら説明すると分かり易い(説明後にこれを学生に回して確認させる)．逆関数のもととなる e^z や z^n などの関数は値域のリーマン面を w 平面に射影したものとみて，逆関数は定義域のリーマン面を z 平面に射影してみると多価関数と見ることができることを指導する．この方がかえって学生にとって理解し易いようである．また，主値についても分かり易い．

3・1 複素積分

複素積分の定義と複素積分を実数が積分変数の積分(置換積分)で計算できることを指導した後，簡単な積分の計算練習をし，次の内容について指導する．

③直線 C が点 β から点 γ へ向かう線分，つまり $C: z=\beta+(\gamma-\beta)t \quad 0\le t\le 1$ とするとき，

$\int_C(z-\alpha)^n dz=F(\gamma)-F(\beta)$ が成立する．

ただし，$F(z)=\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$ とする．

④曲線 C が点 α を中心とする正の向きの円，$C=\{z\,|\,|z-\alpha|=r\}$，$z=re^{it} \quad 0\le t\le 2\pi$ のとき，

$\int_C(z-\alpha)^n dz=\begin{cases}2\pi i & n=-1\\ 0 & n\ne -1\end{cases}$ が成立する．

証明は簡単であるが，これらの事実が後に指導する内容の基本となることを注意しておく．

3・2 コーシーの積分定理

コーシーの積分定理は，きれいな形をしているので学生にとっては覚えやすい定理である．しかし，成立する理由や意味について理解することは難しい．成立する理由や意味を学生に理解させるために，この定理を次のように指導する．

複素積分の定義から，曲線 C を m 多角形で近似して C_0 とする．m 個の頂点を複素数でそれぞれ $\{\beta_k\}_{k=0}^{k=m}$ とおき，$\beta_m=\beta_0$ とする．正則関数を

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ とし，$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$，この多角形$C_0$が点αを中心とする円の内部にあり，関数がこの円の内部で正則であれば，③より

$\int_C f(z)dz=\sum_{k=0}^{m-1}(F(\beta_{k+1})-F(\beta_k))=0$ となり，コーシーの積分定理が成立することが簡単に分かる．コーシーの積分定理は，1変数の連続関数fに対する実数の積分 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ にあたり，1変数の実数関数の場合は$a=b$のときは区間の長さが0となり積分の意味がないが，複素数の場合は複素平面で積分を考えているため，閉曲線では積分の意味を持つがその値が0となるということが分かる．成立条件が1変数の実数関数の場合はfが連続であり，複素関数の場合は正則であるということである．学生にとっては，条件については印象に残らず忘れがちになってしまうが，条件が重要であることを強調しておく必要がある．

しかし，この方法は循環論法になってしまうため，あくまで，この方法は学生に対してコーシーの積分定理の意味を理解させるためのものであることを注意しておく．

この定理の証明には，グリーンの定理を用いているため，3年生で指導する場合は説明するにとどめておく．学生には前述の方法とは別に正式な証明があることを伝え，グリーンの定理を学習後に教科書を見直すことを指示しておく．

グリーンの定理は偏導関数の連続性を必要としているが，三角形を4分割していく初等的な方法(解析概論p209～p210)は微分可能性だけを必要とし，さらに，証明の本質を平易にまとめると3年生にも理解できる内容であると思われる．時間的に余裕がないので授業で取り扱うことはできないが，プリントを配布し自学させ，分からないときは質問に来させるのがよいと思う．

3・3　コーシーの積分表示

通常は微分可能であることとコーシーの積分定理を用いて証明されるが，ここでは意味を理解するための導入として，正則関数がテーラー展開可能であり，項別積分可能であることを使って成立していることを示す．これは，前記の④より次のように明らかであり，学生にとって意味が分かり易い．

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ のとき，

$$\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}dz=\int_C\frac{a_0}{z-\alpha}dz+\sum_{n=1}^{\infty}\int_C a_n(z-\alpha)^{n-1}dz$$

$=2\pi i a_0=2\pi i f(\alpha)$ となり，成立している．

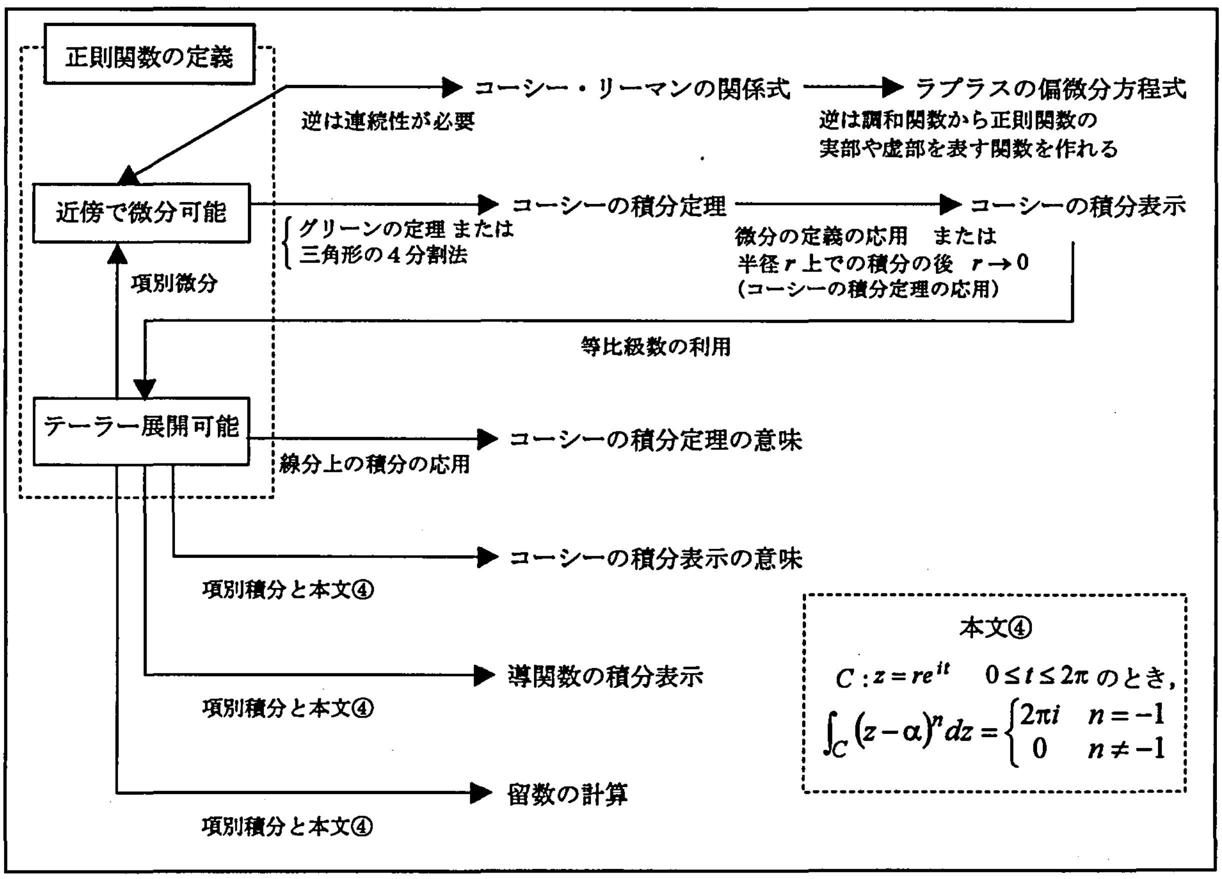

図1　正則関数の証明の流れ

ただし，これも循環論法になってしまうため，あくまで，学生に対してコーシーの積分表示の意味を理解させるためのものである．このことは学生に対して注意を促しておく必要がある．正式な証明は正則関数のテーラー展開の項において行うことを学生に伝えておく．

導関数の積分表示も次のように同様に証明できる．

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}}dz = \sum_{n=0}^{k-1}\int_C \frac{a_n}{(z-\alpha)^{k+1-n}}dz + \int_C \frac{a_k}{z-\alpha}dz + \sum_{n=k+1}^{\infty}\int_C a_n(z-\alpha)^{n-k-1}dz$$

$$= 2\pi i a_k = 2\pi i \cdot \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

こちらは，正則関数の級数展開の証明には使われていないので，これは問題ない．コーシーの積分表示と数学的帰納法を用いての証明は，学生にとって非常に分かりにくい方法といえる．

３・４　関数の展開

正則の定義を近傍での微分可能として，図１のコーシーの積分定理，コーシーの積分表示，テーラー展開の道筋で説明して，正則の定義が近傍での微分可能性とテーラー展開可能であることが同値であることを説明する．

また，リュービルの定理や代数学の基本定理について触れておいた方がよいと思われる．

３・５　孤立特異点と留数

複素関数 $f(z)$ が点 α で k 位の極の場合，

$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ の係数 a_n について考えると，

$g(z)=(z-\alpha)^k f(z)$ とすると，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-k}(z-\alpha)^n$

となり，$g(z)$ は正則関数である．

したがって，テーラー展開の係数の公式より，

$$a_{n-k} = \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!} = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z-\alpha)^k f(z)\right\}$$

これに対して，真性特異点の場合はこのように正則関数を作ることができないため，各係数は微分による表示ができず，$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ に対して，

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$ と積分表示だけが可能であることを指導する．

k 位の極のとき，係数 a_{n-k} の計算公式において，$n=k-1$ としたときが，留数の計算公式であることに注意する．

高専の複素関数論の理解においては，テーラー展開が重要な要素となっている．このため，微分積分Ⅱにおける実数変数のテーラー展開における指導が重要といえる．

４．おわりに

理論的な流れで整然と体系的に授業を行うことが学生にとって理解し易い順番であるとは思われない．

点 α で正則の定義も近傍で微分可能と定義するよりも，近傍でテーラー展開可能という定義の方が理論的に高度なことが要求されていると考えられ，一般的には理論的に簡単な前者を正則の定義とするのが普通である．しかし，その後の指導や学生の理解し易さ，全体的な見通しを考えると，高専の学生を指導する上では後者の定義の方がよい．授業においては，後者を正則の定義とし，後に２つの定義が同値であることを級数展開のところで説明して，一般的には正則の定義は前者であることを注意すればよいと思われる．

３年生の数学Ｂ(複素関数論を含む)の授業を担当した場合においては，３年生の授業ではこのような指導方針で指導してきたが，１，２年は混合学級であり，３年生以上は学科ごとの学級であるため，１，２年の複素数についての関連分野の授業担当者が違うため，一貫した指導にはなっていないのが現状である．実際には復習も多く取り入れて授業を行っている．また，効率的な授業をするためにも，授業の流れにそって内容をまとめたプリントによる指導も必要である．

３年で複素関数論の理解を深めるための指導の工夫として本稿を取り扱ったが，４年生で指導する場合においても同様であると思われる．また，専門科目との関連から考えると，本稿で述べたように早期に複素平面や極形式，複素数の四則演算の図形的意味，オイラーの公式などについて取り扱っておいた方がよいと思われる．

参 考 文 献

1) 田川生長他：基礎数学，大日本図書
2) 田川生長他：線形代数，大日本図書
3) 田川生長他：微分積分Ⅱ，大日本図書
4) 田川生長他：応用数学，大日本図書
5) 矢野健太郎，石原繁：解析学概論，培風館
6) 藤本敦夫：複素解析学概説，培風館
7) 高木貞治：解析概論，岩波書店
8) 小林茂樹，前田善文，宮下重敬：基礎数学の理解度について－２学年当初の数学学力実態について－，長野工業高等専門学校紀要第33号(1999)