はり要素によるエア・ビーム構造物のリンクリング現象評価

遠藤典男*・三井康司**

Evaluation for Wrinkling Phenomena on Air-Beam Structures Using Beam Elements

Norio ENDOH , Yasushi MITSUI

Membrane structures seem to be increasingly constructed for their own characters. In these structures, we research Air-Beam, which is a long and slender cylindrical shell membrane, is investigated as a beam after internally pressured, and wrinkling phenomenon , a kind of collapse state, reduce their stiffness and give influence to mechanical behavior. Therefor in this research, a numerical analysis for these structures based on FEM is proposed, which formulated the analysis of wrinkling behavior employing beam element, effective area contributed for stiffness that rely on stress state after wrinkling has taken place are defined.

キーワード：膜構造物，エア・ビーム，リンクリング現象，有効断面低減，非線形解析

1．緒　　論

建設工学の分野において軽量化を考慮した膜構造は，経済性，機能性の面で優れているという観点から注目されている．膜構造は種々の方法で張力を導入することにより剛性が与えられる構造であり，張力の導入法により，1）膜材を拡張させ，骨組構造物等に取り付けて，張力を与えるタイプと，2）膜材により密閉された空間に内圧を作用させて，張力を発生させるタイプの2種に大別される．従来，これら構造物の数値解析に対しては，膜面を平面，あるいは曲率を有するシェル要素により離散化する有限要素法[1)~4)]が一般的であるが，膨大な計算機容量が必要となり，これに伴い計算時間も増大する．また，膜材料に剛性を付与するための内圧の影響，膜材料を連続体とし取り扱う際の幾何学的非線形性，材料非線形性等を考慮する場合，数学モデル，計算プログラム等が煩雑なものとなる．

本研究では，先述した膜構造物の中でも2）の範疇に属するエア・ビーム[4),5)]（細長い袋状の膜材料に空気を充填し，圧力を作用させることによりはりとしての剛性を付与した構造物）を対象とし，本来は膜材料と空気の複合構造物であるエア・ビームを便宜的に骨組み構造物へ置換し，はり要素を適用し有限要素定式化を行ったうえで力学的挙動を解析的に考察している．

ここで，エア・ビームに剛性を付与するための内圧による引張応力が外力の作用（主として曲げモーメント）により相殺され，膜面に圧縮応力が作用する場合，薄膜構造特有な崩壊形態であるリンクリング現象[1),2),5)]（膜材料が圧縮応力に抵抗できないために面外変形が生じる一種のしわ状座屈現象）が発生することになる．リンクリング現象の発生によりエア・ビームのはりとしての剛性は著しく低下し，荷重－変位関係は非線形型性を示すことになる．

このような観点から，本研究で提案する数値解析手法は，エア・ビームのリンクリング現象による剛性低下の影響を有効断面積の低減という形で定式化を行う．すなわち，エア・ビームに外力が作用し圧縮応力が発生した領域は剛性に寄与することはないと考え，引張応力が生じている膜材料をエア・ビームの剛性に寄与する有効断面として，はりとしての剛性を算出している．このため，リンクリング現象発生後のエア・ビームの非線形挙動の評価が可能となり，また対象を骨組構造に置換しているため，比較的容易に力学的挙動を検証できると考えられる．

*　環境都市工学科講師
**　信州大学教授
原稿受付　1998年10月30日

2．数値解析手法

2－1　解析の概要

本研究で対象とするエア・ビームは，先にも述べたように細長い袋状の膜材料に空気を充填し，圧力を作用させることによりはりとしての剛性を付与したものである．したがって，エア･ビームは膜材料と空気の複合構造物と考えられるが，本解析手法では便宜的に膜材料で構成された円筒断面，あるいは円弧断面を有する骨組み構造物へ置換し，はり要素により離散化し有限要素定式化を行っている．ここで，エア・ビームを構成する膜材料は本来曲げ，せん断に対する抵抗力が存在してないないため，内圧を作用させ張力を発生させることにより，これらに対する抵抗力を与えている．このため，張力により生じる引張応力が，外力の作用により生じる圧縮応力により相殺され，結果的に圧縮応力が作用している状態でリンクリング現象が発生することになる．本解析では圧縮応力が発生した領域における膜材料は剛性に寄与することはないと考え，圧縮応力の大きさに応じたリンクリング現象が発生する領域を算出し，この領域以外の引張応力が作用している領域によりリンクリング現象発生後の剛性を算出している．また，エア･ビームの有効断面積低下に伴う中立軸位置移動の影響に対しては，変断面はりの概念を導入することにより対処している．

なお，本解析で用いる弾性係数 E は，参考文献4)で示されている荷重－変位関係より算出される，内圧の影響をも考慮した 'エア・ビームの見掛け上の弾性係数' を適用した．

2－2　はり要素による有限要素定式化

エア・ビームは主として曲げを受ける部材であることを鑑みて，以下に曲げに対する有限要素定式化を行い，軸力に対する定式化は割愛し結果のみを概説した後，はり要素の要素剛性マトリックスを導出する．

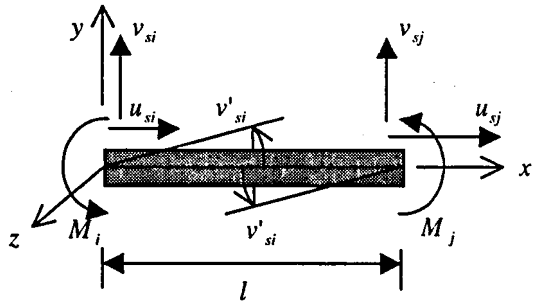
まず，長さ l の要素を考え図心軸における任意点の y 方向変位 v を次式で示される3次式で仮定する．

$$v=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3 \tag{1}$$

つぎに，y 方向の変位 v による x 方向のひずみ：ε_x は

$$\varepsilon_x=-y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2}$$

と表すことができる．ここで，要素端点 i，j を節点とし，各々の節点における変位を



図－1　はり要素概要

$$\{v\}^T=\{v_{si}\quad \theta_{si}\quad v_{sj}\quad \theta_{sj}\} \tag{3}$$

とすると，未定係数

$$\{a\}^T=\{a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\} \tag{4}$$

は次式のように表すことができる．ただし，下付き添え字 $(_s)$ は断面内でのせん断中心 (y_s, z_s) における物理量を表しており，また上付き添え字 $(')$ は x に関する微分を表している．

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_{si} \\ \theta_{si} \\ v_{sj} \\ \theta_{sj} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\{\varepsilon_x\}&=-y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ &=-y\left[-\frac{6}{l}+\frac{12x}{l^3}\quad -\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}\quad \frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}\quad -\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}\right]\{v\}\\ &=[B_v]\{v\}\end{aligned} \tag{6}$$

となる．式(6)の $[B_v]$ を用いることにより y 軸方向変位と回転角に対する要素剛性マトリックス $[k_v]$ が次式で与えられる．

$$[k_v]=\int[B_v]^T[D][B_v]dv \tag{7}$$

ただし，$[D]$ はエア・ビームの見掛け上の弾性係数 E を成分とする応力－ひずみマトリックスである．

つぎに，軸力が作用した場合の要素両端における x 軸方向の節点変位

$$\{u\}^T=\{u_{si}\quad u_{sj}\} \tag{8}$$

に対する要素剛性マトリックスが

$$[k_u]=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

と与えられるため，はり要素の変位

$$\{\delta_s\}^T=\{u_{si}\quad v_{si}\quad v'_{si}\quad u_{sj}\quad v_{sj}\quad v'_{sj}\} \tag{10}$$

に対する要素剛性マトリックスは以下のように表すことができる．

$$[k]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & sym. \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ \frac{-EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{11}$$

一方，外力の作用で発生した軸力により生じる x 軸方向の応力 σ_N は，

$$\sigma_N=E(u_{sj}-u_{si})/l \tag{12}$$

と表すことができ，また曲げモーメントによりエア・ビームを構成する膜材料に生じる応力 σ_M は，$[B_v]$ および $[D]$ を用いて

$$\begin{aligned}\sigma_M&=[D][B_v]\{v\}\\&=-Ey\left[-\frac{6}{l}+\frac{12x}{l^3}\quad -\frac{4}{l}+\frac{6x}{l^2}\right.\\&\qquad\left.\frac{6}{l^2}-\frac{12x}{l^3}\quad -\frac{2}{l}+\frac{6x}{l^2}\right]\{v\}\end{aligned} \tag{13}$$

と表すことができる．式(13)に $x=0$ あるいは $x=l$，および $y=+r$ あるいは $y=-r$ を代入することにより節点で生じる最小応力が得られる．このため，式(12)と(13)を重ね合わせることにより x 軸方向の要素節点応力が

$$\sigma=\sigma_N+\sigma_M \tag{14}$$

と与えられる．

2－3　リンクリング現象に伴う有効断面積低減

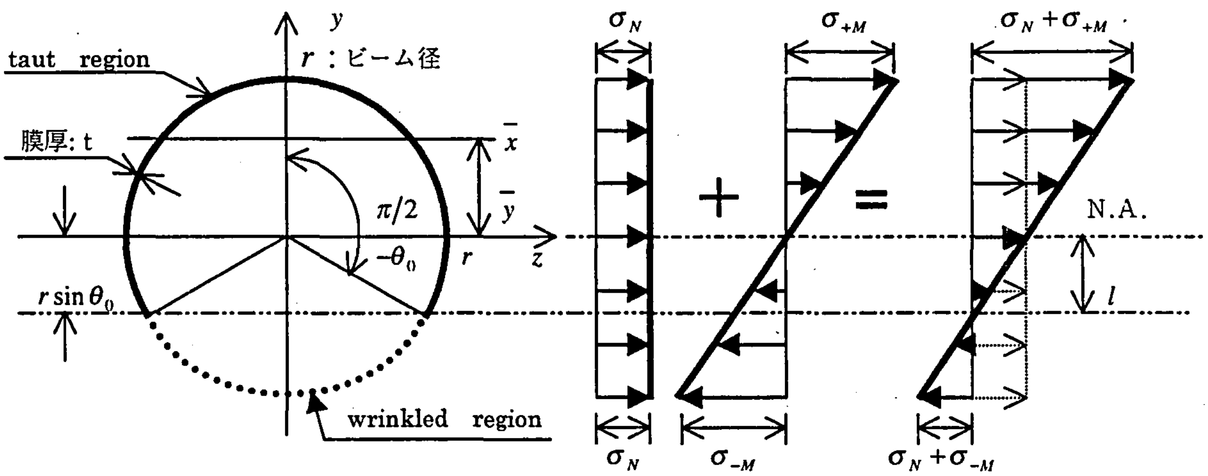
リンクリング現象の発生に伴うエア・ビームの曲げ剛性低下の影響を，発生した圧縮応力に応じたはりの有効断面の低減という形で表すことにより対処している．以下に定式化の概略を記す．

まず，図－2 に示されるエア・ビームの断面を考える．図中，荷重は y 軸方向にのみの作用すると仮定する．エア・ビームの断面において引張応力のみが作用している状態では，断面が円形のため図心軸は x 軸と一致しており，このときの断面 2 次モーメントは，

$$I_0=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2 dA=\pi r^3 t \tag{15}$$

となる．ただし，r はエア・ビームの半径，t はエア・ビームを構成する膜材料の厚さである．

いま，外力の作用により発生する圧縮応力が，初期張力により発生する引張応力よりも大きくなり，図－2の破線部分までリンクリング現象が拡大したと仮定する．破線部分では圧縮応力が存在しているためエア・ビームの剛性に寄与していないと考えられる．このため，破線部を除いた実線部分の領域，すなわちエア・ビームの剛性に寄与していると考えられる領域のみを考慮した断面 2 次モーメント I_w の算定を試みる．まず，剛性に寄与している部分は，円断面の一部が欠如した円弧断面であり，円断面の図心軸とは異なっていることになるため，x 軸から $\bar{y}$ の距離にある新たな図心軸 $\bar{x}$ の位置を算出する必要がある．エア･ビームの剛性に寄与していると



図－2　エア･ビーム断面の応力状態

考えられる実線部分の x 軸に対する断面 1 次モーメント G_w は，リンクリング現象が発生している領域を表すパラメータ $\theta_0(0\le\theta_0\le\pi/2)$ を用いて

$$G_w = 2\int_{-\theta_0}^{\pi/2}\left(y-\bar{y}\right)dA$$

$$= 2rt\left[r\cos\theta_0 - \bar{y}(\pi/2+\theta_0)\right] \tag{16}$$

と表すことができるため，式(16)に $G_w=0$ なる条件を代入することにより

$$\bar{y} = \frac{2r\cos\theta_0}{\pi+2\theta_0} \tag{17}$$

が得られる．つぎに式(16)を用いて $\bar{x}$ 軸からの断面 2 次モーメント I_w を計算すると

$$I_w = 2\int_{-\theta_0}^{\pi/2}\left(y-\bar{y}\right)^2 dA$$

$$= \frac{1}{2}r^3t(\pi+2\theta_0-\sin 2\theta_0) - \frac{4r^3t\cos^2\theta_0}{\pi+2\theta_0} \tag{18}$$

を得ることができる．

さて，図－2 に示されているように，軸力により生じる応力を $\sigma_N(>0)$，曲げモーメントにより生じる圧縮応力を $\sigma_{-M}(<0)$，引張応力を $\sigma_{+M}(>0)$ とすると（$-\sigma_{+M}=\sigma_{-M}$），リンクリング現象が発生する条件が次式で与えられる．

$$|\sigma_{-M}| > |\sigma_N| \tag{19}$$

また，膜材料に引張応力のみが作用している領域の x 軸からの鉛直距離を l とすると，l と σ_N，σ_{-M}，σ_{+M}，r との間には次式のような関係がある．

$$|\sigma_N+\sigma_{-M}| : (r-l) = |\sigma_N+\sigma_{+M}| : (r+l) \tag{20}$$

式(19)より l は

$$l = r\left(-\frac{\sigma_N}{\sigma_{-M}}\right) \tag{21}$$

と表すことができる．また θ_0，l および r の間には，

$$l = |r\sin(-\theta_0)| \tag{22}$$

の関係がある．式(21)と式(22)が等価であることを考慮すると，圧縮応力が生じている領域，すなわちリンクリング現象が発生している領域が既知となる．

$$\sin(-\theta_0) = \left(\frac{\sigma_N}{\sigma_{-M}}\right) \tag{23}$$

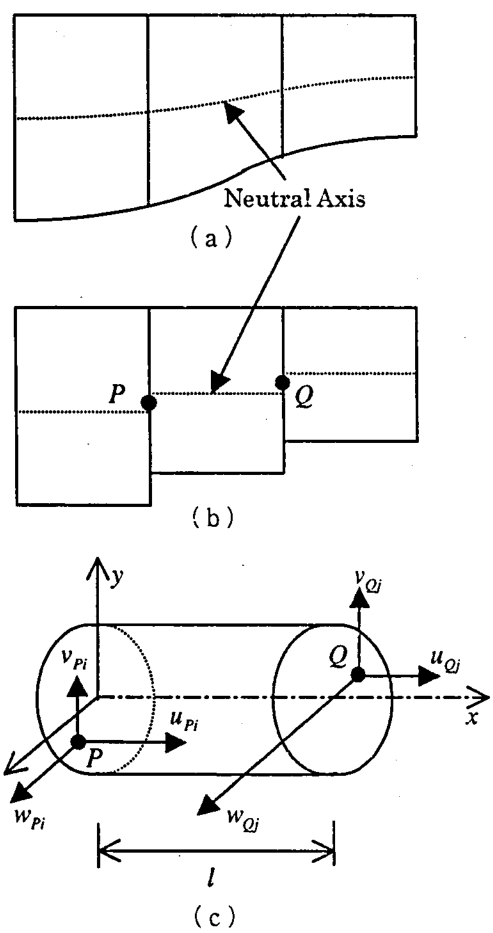
あるいは

$$\theta_0 = -\sin^{-1}\left(\frac{\sigma_N}{\sigma_{-M}}\right) \tag{24}$$

2－4 図心軸の移動による要素剛性マトリックスの変換

エア・ビームの力学的挙動は工学的はり理論に基づき，またねじりによる変形が生じることはないと仮定する．このような条件の下で，リンクリング現象の発生によりエア・ビームの有効断面積を低下させ中立軸の位置が移動した場合，隣り合う要素の中立軸が一致していないことにより生じる，節点における変位の不連続性，および力学的釣合条件が満足されないとう 2 つの問題が現れる．これらの問題に対処するため，本解析では変断面はりの概念を導入した．変断面はりの概念を用いた有限要素定式化を以下に概略する．

まず，図－3（a）に示す変断面はりを同図－（b）に示す一様断面はりの集合体に理想化して考える．ここで，はりの断面は不連続に変化するため，要素境界面における図心やせん断中心は必づしも一致し



図－3 変断面はり概要

ておらず，得られた各々の要素剛性マトリックスを単純に重ね合わせるわけにはいかない．このため，各要素の図心(せん断中心)軸で算定された要素剛性マトリックスを座標変換し，要素両端における断面内の任意点 P ， Q を節点とする一般的な要素剛性マトリックスを作成する．そこでまず，図－３（ｃ）に示すように，はりの図心軸を x 軸とし，断面の慣性主軸方向を y , z 軸とする．はり要素の一方の節点における断面内の任意点 $P\left(y_P, z_P\right)$ に対する x , y , z 軸方向変位 $u_P(x), v_P(x), w_P(x)$ が以下のように与えられる．

$$u_P(x)=u_s(x)-y_P v'_s(x)-x_P w'_s(x) \tag{25}$$

$$v_P(x)=v_s(x) \tag{26}$$

$$w_P(x)=w_s(x) \tag{27}$$

式(24)～(26)をせん断中心に対する変位へと書き換えると次のようになる．

$$u_s(x)=u_P(x)+y_P v'_s(x)+x_P w'_s(x) \tag{28}$$

$$v_s(x)=v_P(x) \tag{29}$$

$$w_s(x)=w_P(x) \tag{30}$$

同様に他方の節点においても，せん断中心軸に対する変位と任意点 $Q\left(x_Q, y_Q\right)$ に対する変位との関係が得られることになる．

さて，要素の両節点でせん断中心軸が慣性主軸の原点と一致し，また外力は y 軸方向にのみ作用し，z 方向への変形がないと仮定（工学的はり理論における断面剛の仮定を適用）すると，式(28)における $w(x)$ に関する項，および式(30)は省略できことになる．このため式(28)，(29)を用いることにより，式(10)で表されるせん断中心に関する変位 $\left\{\delta_s\right\}$ と，要素端における断面内の任意点 P および Q に関する変位 $\left\{\delta_{PQ}\right\}$ が次のように関係付けられる．

$$\left\{\delta_s\right\}=[T]\left\{\delta_{PQ}\right\} \tag{31}$$

ただし，

$$\left\{\delta_{PQ}\right\}^T=\left\{u_{Pi} \quad v_{Pi} \quad v'_{Pi} \quad u_{Qj} \quad v_{Qj} \quad v'_{Qj}\right\} \tag{32}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

である．したがって，任意点 P ， Q における剛性方程式が次式で与えられる．

$$\left[k_{PQ}\right]\left\{\delta_{PQ}\right\}=\left\{f_{PQ}\right\} \tag{34}$$

$$\left[k_{PQ}\right]=[T]^T[k][T] \tag{35}$$

ただし $\left\{k_{PQ}\right\}$，$\left\{\delta_{PQ}\right\}$ は各々任意点 P ， Q に関する要素剛性マトリックス，および等価節点力である．

ここで，本解析における要素剛性マトリックスの計算手順を概略すると以下のようになる．まず，式(14)により要素両端節点における応力を計算した後，要素のどちらか一方，あるいは両方の節点応力が圧縮となった場合，式(16)により応力が小さい方の図心位置を計算し要素節点の応力状態に基づき有効断面積低減がなされた要素剛性マトリックス $[k]$ を算出する．つぎに，他方の節点における図心位置を計算し，要素両端の節点における図心位置の差が式(33)で与えられる変換マトリックス $[T]$ の y_P ， y_Q に相当する．式(35)により $[k]$ は他端での応力状態に応じて算定された図心位置での節点変位に対応した要素剛性マトリックス $\left[k_{PQ}\right]$ へと変換される．

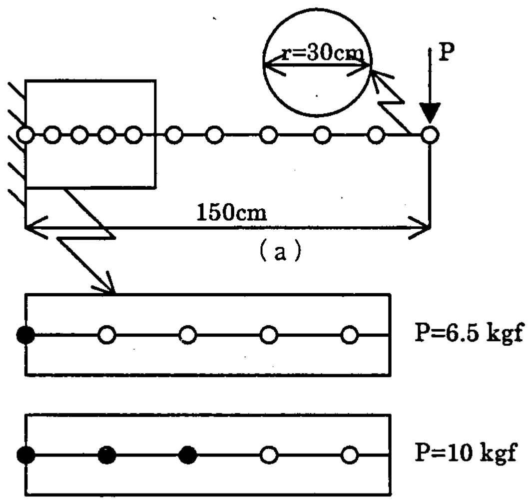
最後に，応力に依存する有効断面の減少とこれに伴う中立軸の移動の影響を，変断面はりの概念を導入することにより対処しているため，リンクリング現象発生後のエア・ビームの挙動は非線形問題となる。これに対処するため，本法では直接反復法を適用し，図－２で与えられている引張応力 $\sigma_N+\sigma_{+M}$ とリンクリング現象が発生するビーム下端から l_w の距離での圧縮応力 $\sigma_N+\sigma_{-M}$ との比

$$f=\frac{\sigma_N+\sigma_{-M}}{\sigma_N+\sigma_{+M}} \leq 0.01 \tag{36}$$

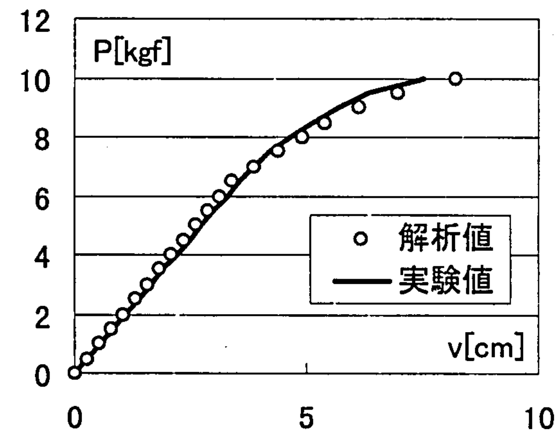
がすべての節点で満足されたとき収束したものと見なし数値解析解としている．

３．数値計算例

本解析手法の妥当性を検証するため，参考文献５）において実験がなされた，先端に集中荷重Ｐが作用する片持ちばり形式のエア・ビームの数値解析を行う．図－４（ａ）にエア・ビームの幾何形状および離散化状態，荷重条件，境界条件を示す．エア・ビームの半径 30cm，スパン長は 150cm，であり，10 要素 11 節点により離散化を行った．ここで，片持ちばりの固定点ではモーメントが大きくなり，これに伴いリンクリング現象も発生し易くなるためるため要素分割を細かくしている．また，膜材料の厚さは 0.005cm とし，解析に用いる物性値は弾性係



図－4　エア・ビームの幾何条件と
リンクリンク現象の発生荷重と発生節点



図－5　荷重－変位関係

数を 40.80kgf/cm^2, 内圧を 0.173kgf/cm^2 とした．図－4（b）にリンクリング現象が発生した節点を示す．図中●がリンクリング現象が発生している節点で，○が全断面で引張応力が作用している節点である．図示した荷重は，荷重設定の都合で理論的なリンクリング現象発生荷重と一致していない（リンクリング現象が発生する理論的な荷重は，固定端で 6.09kgf，3番目の節点では 7.02kgf）が，同等な荷重で，各節点でリンクリング現象が発生した．

図－5に荷重（P）－変位（v）関係を示す．変位は，荷重作用点の鉛直変位である．図中，実験値は実線で示し，解析値は○で示している．理論的にエア・ビームの全断面で引張応力が生じている荷重段階（P≦6kgf）では，荷重－変位関係は線形を示しており，実験値と解析値はよく一致している．一方，リンクリング現象が発生した直後の荷重－変位関係が非線形性を示す荷重段階（6.5kgf≦P≦10kgf）では，荷重が大きくなるに従い解析値の変位が実験値の変位よりも大きくなる傾向にある．これは，リンクリング現象の発生により圧縮応力の再配分が行われ，有効断面積（引張応力が作用している領域）は本法により算定した値よりも実際には大きな値となっているためと考えられる．しかしながら，変位が大きく得られることは，設計・保守の際安全側の結果が得られることであり，安全性を議論する場合において本法は有用であると考えられる．

4．結　論

本文では空気と膜材料の複合構造物であるエア・ビームをはり要素により離散化し有限要素定式化することにより，従前の膜面をシェル要素等により離散化した有限要素法に比し，変形挙動を容易に検証することができた．また，膜材料が引張力に対する抵抗力を有さないという物理的特性を鑑み，リンクリング現象が発生する領域を算定し，引張応力の生じている領域のみを有効断面として剛性を算定することにより，エア・ビームのリンクリング現象発生後の非線形挙動が評価可能になったと考えられる．

参　考　文　献

1) R.K.Miller,et al.：Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes, Compt. & Struct., Vol.20, No.1～3, pp.631～639, 1985.
2) D.C.Roddeman,et al.：The Wrinkling of Thin Membranes:Part Ⅰ&Ⅱ, ASME, Vol.54, pp884～891, 1987.
3) 鈴木俊男・半谷裕彦：異方張力曲面形状の数値解析，膜構造研究論文集，No.4，pp.1～12, 1990.
4) 遠藤典男・瀬川信哉・三井康司・笹川明：エア・ビーム構造物の剛性評価に関する考察，構造工学論文集，Vol.38A，pp.1329～1342, 1992.
5) 植村益次：wrinkle したエアビームの耐荷能力，テント構造研究会，1969.