極限の指導について
——無限概念の指導について——

前 田 善 文*

Teaching Limit
Teaching of the Infinite Concepts

Yoshifumi MAEDA

When students fail to understand concepts of limit and infinity, they will surely have difficulty studying differential and integral calculus. However, at this college, we teach mainly the computation of each category instead of teaching each theoretical part in detail, because of the shortage of classes' hours. I feel that some students make the incorrect assumption that the concepts of infinity and eternity are synonymous.

Considering the reasons mentioned above, I make the students fill questionnaires about the concepts of infinity and analyzes their opinion poll. I then think about ways of teaching the concepts of limit and infinity. Also, I'll think over certain points in teaching these concepts. Further, I'd like to continue to study and search for better way to teach these concepts.

キーワード：極限，無限概念，永遠

1．はじめに

工業高等専門学校において，極限については関数・数列の極限，無限級数のところで指導される内容であるが，他にも指導する内容も多く授業時間数の不足と高専は工学系ということもあり，指導も計算が主体となり理論的な部分を詳しく指導することはできないのが現状である．しかし，極限や無限の概念については学生がここでつまずくと微分・積分などその後の学習に大きな影響を与える．

無限の概念については，小・中学校での算数・数学の授業において「アキレスとカメ」のような話題として取り上げられることもあるようである．小・中学生には意外なことであり，話題としてはおもしろいのであるが，小・中学校の段階では極限や無限についての学習をしていないために理解が不十分であり，曖昧な印象で終わってしまうことが多く，かえって間違った印象を与えてしまうおそれもある．

また，無限と永遠という概念を同義語のように捉えてしまう学生が少なからずいるように感じられる．

以上の理由から，学生に無限の概念についてのアンケート調査を行い，学生の意識を分析し，授業において極限や無限の概念をいかに指導すべきかを考察し，指導の留意点について考え，より良い指導方法について検討する．

2．意識調査の内容

2－1基本的な考え

無限や永遠の概念については，無限試行，無限の集合や空間は存在するのか，空間や時間の無限分割はできるのか，永遠とは何かと哲学的に考えるのではなく，現実をモデルとした数学という観点から純粋に数学的に捉えることにする．数学では哲学的な無限や永遠の概念に深入りすることなく，$\varepsilon-\delta$ 論法などによって数学的に極限が定義されているが，高専の授業では $\varepsilon-\delta$ 論法を教えることより，工学を勉強している学生には直観的な無限が，より数学的な概念に近いものとなるように指導することが重要であると考える．数学的な極限の定義といっても，本来は直観的に想定し得る無限や無限試行がモデルと

* 一般科 助教授（数学）
原稿受付 1997年10月31日

なっているはずである．したがって，ここではこのモデル化された無限や無限試行を数学的に考え，永遠を時間的な無限として考えることにする．

２－２調査の目的

1996年度においては，次のようなアンケート調査を１～５年生に実施して，学生の意識を分析し，指導の留意点の考察や指導方法について検討する．

1997年度においては，３，４年生に５－２の指導を実施後に同じアンケート調査を実施して学生の意識を分析し，今後の指導に関してさらに検討する．

２－３調査方法

① 意識調査の対象者

1996年度

１年生２クラス（混合学級）　81人
２年生２クラス（混合学級）　84人
３年　電子制御工学科　41人
　　電子情報工学科　43人　合計84人
４年　機械工学科　38人
５年　機械工学科　38人
合計　325人

1997年度

３年　電子情報工学科　45人
　　環境都市工学科　36人　合計81人
（３年生の５分の２は前年度２年次の混合学級において既に意識調査を受けている）
４年　電気工学科　36人
（４年生は全員今回が初めてである）
５年　機械工学科　31人
合計　148人
（５年生は全員が前年度４年次に既に意識調査を受けている）
（調査時の欠席者があるためクラス人数と異なる）

② 意識調査の方法

1996年度　７月　約50分間で実施．
（2年は関数の極限，３年は無限級数をすでに学習している）
1997年度　10月　約50分間で実施．
（指導後に実施，５年機械工学科については前年度指導してあるので今年度は指導をしていない）
Ｂ４用紙１枚　問題の意味を説明し（約10分間），残り約40分間で理由を記入させた（電卓やポケコン等は使用可とした）．

③ 意識調査の問題

問題１　空気抵抗がないと仮定して，床から５mの高さの位置からボールを落下させる．ボールは床にバウンドし，振動が始まる．このとき次の問題について考えなさい．

（必要であれば重力加速度を簡単のために10 m/s^{2}とせよ．また，反発係数を簡単に考えると，反発係数が１とはバウンドしたボールが同じ高さまで跳ね上がり，反発係数が0.5とはバウンドしたボールが前の４分の１の高さまで跳ね上がることを意味する）

(1) ボールと床の間の反発係数が１のとき，ボールの振動は永遠に続く．

(2) ボールと床の間の反発係数が0.5のとき，ボールの振動は振れ幅が減少していくが，理論的には，わずかでも振動は永遠に続く．

解答項目

１正しい，　２理論的には正しいが現実に反する，
３誤りである，　４その他
（ここでの現実とは問題文中のような理想的世界があったと仮定し，その世界を現実とみよ）

問題２　数直線上（１めもり１cmとする）に点Ａ(－２)と原点がある．動点Ｐは点Ａからスタートして，初めの１秒間は１cm/sの速さで，次の１秒間は前の速さの半分で原点方向に運動する，このような運動が継続して行われるとき，動点Ｐは永遠に原点に到達しない．

（現実の問題ではないので，数学的に（理論的に）考えよ）

解答項目

１正しい，　３誤りである，　４その他
（３回目まで，図を描き動点Ｐの動きを説明）

問題３　数直線上（１めもり１cmとする）の原点からスタートし，正の方向に動く動点Ｐがある．初めの１cmは１cm/sの速さで，次の$1/4$ cmは$1/2$ cm/sの速さ，次の$1/9$ cmは$1/3$ cm/sの速さで（n回目は$1/n^2$ cmを$1/n$ cm/sの速さで），次々に点が動いていくとき，この動点Ｐは永遠に動き続ける．

解答項目

１正しい，　３誤りである，　４その他
（３回目まで，図を描き動点Ｐの動きを説明）

問題４　アキレスの歩く速さは２m/s，カメの速さは１m/sとするとき，カメはアキレスより８m手前から出発すると，実際には８秒後には追い越すことができるが，理論的にはアキレスはカメを追い越すことができない．

（ただし，アキレスもカメも歩幅は考えず，滑らかに動いているものとする．１m/sで動けるカメがいると思って考えよ）

ここでいう理論的とは，最初の４秒間でアキレスが８m進み，カメのもといた位置まで行く間に，カメは４m先に進んでしまう．次にまた，アキレスがカメの位置まで行く間にカメは２m先に進んでいる．

このように，アキレスがカメの位置まで行く間にカメはさらに先に進んでしまっている．つまり，カメは永遠にアキレスより前にいることになる．

この理論の正否について考えよ．

解答項目

1正しい，　2理論的には正しいが現実に反する，3誤りである，　4その他

（3回目まで，図を描いてアキレスとカメの動きを説明）

3．意識調査集計結果

（ ）内は正答の理由が正しく記入されている数と全体からの百分率である．

3－1解答の集計結果

表1　問題1 (1)の解答集計結果

	解答番号	1		2		3		4	
1996年度	1年	59(57)	72.8%(70.4%)	10	12.3%	11	13.6%	1	1.2%
	2年	61(57)	72.6%(67.9%)	18	21.4%	5	6.0%	0	0.0%
	3年	67(60)	79.8%(71.4%)	6	7.1%	9	10.7%	2	2.4%
	4年	35(32)	92.1%(84.2%)	2	5.3%	1	2.6%	0	0.0%
	5年	31(30)	81.6%(78.9%)	6	15.8%	1	2.6%	0	0.0%
	合計	253(236)	78.8%(73.5%)	42	13.1%	27	8.4%	3	0.9%
1997年度	3年	76(71)	93.8%(87.7%)	3	3.7%	2	2.5%	0	0.0%
	4年	33(31)	91.7%(86.1%)	1	2.8%	2	5.6%	0	0.0%
	5年	28(26)	90.3%(83.8%)	3	9.7%	0	0.0%	0	0.0%
	合計	137(128)	93.2%(85.1%)	7	4.7%	4	2.7%	0	0.0%

表2　問題1 (2)の解答集計結果

	解答番号	1		2		3		4	
1996年度	1年	31	38.3%	30	37.0%	17(1)	21.0%(1.2%)	3	3.7%
	2年	34	40.5%	35	41.7%	13(1)	15.5%(1.2%)	2	2.4%
	3年	25	29.8%	36	42.9%	20(1)	23.8%(1.2%)	3	3.6%
	4年	15	39.5%	15	39.5%	7(0)	18.4%(0.0%)	1	2.6%
	5年	28	73.7%	9	23.7%	1(0)	2.6%(0.0%)	0	0.0%
	合計	133	41.4%	125	38.9%	58(3)	18.1%(0.9%)	9	2.8%
1997年度	3年	31	38.3%	4	4.9%	45(20)	55.6%(24.7%)	1	1.2%
	4年	16	44.4%	3	8.3%	17(11)	47.2%(30.6%)	0	0.0%
	5年	2	6.5%	1	3.2%	28(16)	90.3%(51.6%)	0	0.0%
	合計	49	33.1%	8	5.4%	90(46)	60.8%(31.1%)	1	0.7%

表3　問題2の解答集計結果

	解答番号	1		2		3		4	
1996年度	1年	34(1)	42.0%(1.2%)			44	54.3%	3	3.7%
	2年	45(9)	53.6%(10.7%)			36	42.9%	3	3.6%
	3年	35(9)	41.7%(10.7%)			46	54.8%	3	3.6%
	4年	21(5)	55.3%(13.2%)			15	39.5%	2	5.3%
	5年	24(4)	63.2%(10.5%)			14	36.8%	0	0.0%
	合計	157(28)	48.9%(8.7%)			157	48.9%	11	3.4%
1997年度	3年	50(28)	61.7%(34.6%)			31	38.7%	0	0.0%
	4年	17(8)	47.2%(22.2%)			19	52.8%	0	0.0%
	5年	16(12)	51.6%(38.7%)			15	48.4%	0	0.0%
	合計	83(48)	56.1%(32.4%)			65	43.9%	0	0.0%

表4　問題3の解答集計結果

	解答番号	1		2		3		4	
1996年度	1年	65(0)	80.2%(0.0%)			8	9.9%	8	9.9%
	2年	69(1)	82.1%(1.2%)			7	8.3%	8	9.5%
	3年	47(1)	56.0%(1.2%)			29	34.5%	8	9.5%
	4年	26(0)	68.4%(0.0%)			9	23.7%	3	7.9%
	5年	31(0)	81.6%(0.0%)			5	13.2%	2	5.3%
	合計	238(2)	74.1%(0.6%)			58	18.1%	29	9.0%
1997年度	3年	53(25)	65.4%(30.9%)			26	32.1%	2	2.5%
	4年	28(17)	77.8%(47.2%)			8	22.2%	0	0.0%
	5年	23(18)	74.2%(58.1%)			8	25.8%	0	0.0%
	合計	104(60)	70.3%(40.5%)			42	28.4%	2	1.4%

表5　問題4の解答集計結果

	解答番号	1		2		3		4	
1996年度	1年	3	3.7%	39	48.1%	35(7)	43.2%(8.6%)	4	4.9%
	2年	10	11.9%	31	36.9%	37(15)	44.0%(17.9%)	6	7.1%
	3年	4	4.8%	30	35.7%	48(15)	57.1%(17.9%)	2	2.4%
	4年	3	7.9%	19	50.0%	13(8)	34.2%(21.1%)	3	7.9%
	5年	3	7.9%	12	31.6%	21(14)	55.3%(36.8%)	2	5.3%
	合計	23	7.2%	131	40.8%	154(59)	48.0%(18.4%)	17	5.3%
1997年度	3年	23	28.4%	7	8.6%	49(22)	60.5%(27.2%)	2	2.5%
	4年	1	2.8%	2	5.6%	32(10)	88.9%(27.8%)	1	2.8%
	5年	2	6.5%	3	9.7%	25(10)	80.6%(32.3%)	1	3.2%
	合計	26	17.6%	16	10.8%	102(42)	68.9%(28.4%)	4	2.7%

3－2その他の項目と解答分類

表6　解答理由の無記者入数

	問題1(1)	問題1(2)	問題2	問題3	問題4
96年	30(9.2%)	39(12.0%)	38(11.7%)	80(24.6%)	76(23.4%)
97年	6(4.1%)	10(6.8%)	12(8.1%)	15(10.1%)	34(23.0%)

表7　アキレスとカメの話を調査以前に聞いたことの有無

		小学校のとき	中学校のとき	高専に入ってから	正答率
1996年度	聞いたこと有	33(10.2%)	39(12.0%)	93(28.6%)	49.7%
	聞いたこと無	160(49.2%)			45.0%
1997年度	聞いたこと有	14(9.5%)	37(25.0%)	78(52.7%)	50.4%
	聞いたこと無	19(12.8%)			57.9%

正答率とは，解答理由はともかく，それぞれの中での解答3（正解）を選んだ者の率である．

表8　問題2，3の解答相互の関連について（解答分類）

	解答分類	1・1	1・3	3・1	3・3
1996年度	全体	120(56 46.7%)	23(14 60.9%)	114(51 44.7%)	32(15 46.9%)
	理由を誤った者	80(24 30.0%)	12(5 41.7%)	102(39 38.2%)	27(10 37.0%)
1997年度	全体	60(41 68.3%)	23(18 78.3%)	44(30 68.2%)	19(13 68.4%)
	理由を誤った者	12(7 58.3%)	8(6 75.0%)	19(14 73.7%)	14(8 57.1%)

ただし，表９の上段の解答分類１・３とは問題２で解答１，問題３で解答３を選択したことを意味する．（ ）内は問題４で解答３（正解）を選んだ者の数とその分類の中での百分率である．
理由を誤った者とは，問題２，３，４の理由のすべてを間違えた者を対象とした．

３－３主な解答理由

問題１(1)の解答理由

☆解答１を選択した理由

①バウンドした後，同じ高さまで上がるので同じことの繰り返しで永遠に続く．

②エネルギー損失がないのでエネルギー保存の法則より振動は永遠に続く．

（表現の違いは多少あるが，以上のような理由が多かった．これは正解とした）

☆解答２～４を選択した理由

①空気抵抗がなく，反発係数が１であることはありえない．（確かにその通りではあるが，問題に設定された仮定の上に立って考えようとしていない．このことについては，問題を解説する中で，この理想的世界を現実と考えるように説明をしてある）

②重力によって止まる．

人工衛星が重力に捉えられ落下するようにいつかは止まる．

（この理由は１，２年生に多い．１年生はすでに落下運動は学習している）

③衝突による熱エネルギーの損失により止まる．

問題１(2)の解答理由

☆解答１，２を選択した理由

①床とボールの距離が半分，半分となり０に近づく（収束する）が，０とはならないので永遠に続く．

☆解答３を選択したが間違った理由

①重力によって止まる．

（問題１(1)と同じであり，同一人物が解答理由としてあげている）

②床とボールの距離が半分，半分となり０に近づく（収束する）ので止まる．

③エネルギーが減少していくのでいつかは止まる．

（時間を無視している．一定時間にエネルギーが４分の１になっていくのなら理論的には止まることがないことに気がついていない）

問題２の解答理由

☆解答１を選択したが間違った理由

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$ であるが，極限であるので到達しない．

（表現が曖昧で正解・不正解のどちらとも判断することができない解答もあったが，経過時間について考えていないものは解答理由を間違いとした．３～５年生に多い）

②原点までの残りの距離は $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ であるが，極限であるので到達しない．

（①と同じ理由で不正解とした．低学年では lim を使って書かれてはいないが，この理由が多い）

③速度が $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ より，途中で止まり，原点には到達しない．（ごく少数）

☆解答３を選択した理由

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$ であるので，到達する．

②原点までの残りの距離 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ であるので到達する．

③速度が０にならないので，少しづつではあるがいつまでも動き続け原点に到達する．

問題３の解答理由

☆解答１を選択したが間違った理由

①速度が $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるが，極限であるので絶対０にはならないから永遠に動き続ける．

（速度が０にならないので，少しづつではあるがいつまでも動き続ける）

☆解答３を選択した理由

①速度が $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるのでいつかは止まる．

問題４の解答理由

☆解答３を選択したが間違った理由

①８秒後には同じ位置になり，９秒後には追い越しているから．

（正しいのであるが，この理論について正否をきいている問題の意味を正しく理解していない．最初の解説では，この理論が正しいと思う者は解答１か２，この理論自身の矛盾点を見つけた者は解答３を選択するように説明した．理由を間違えた者の大多数がこれと同様な理由を挙げている）

②カメを意識しなければ追い越せる．（少数）

４．意識調査の考察

学生にとってこの意識調査の問題に対する反応は，興味を示さず解答を短時間で選んで終わりとしてしまった者もわずかにいたが，多くの学生は興味を持って取り組んでくれた．約50分で実施したが理由を記入するには時間的に厳しかったようである．また，説明は加えたが十分ではなく，問題１の文中の

現実の意味がはっきりしなかった面があったようである．数学ではあまり時間的な概念を扱わないので最初に物理的な例から出題したが，かえって物理的なことがわからないために混乱してしまった者も少数いたようである．

4－1　1996年度意識調査の考察

問題1(1)は高い正解率でほぼ理由も書けていたのだが，(2)については正解率が低く，理由を書けた者は1％に満たなかった(3名)．実際にボールをバウンドさせたとき，ボールの振動は止まってしまう．この現実をどのように学生が考えているかがよく分かる．この設問では5年生だけが3と解答したものが少ない．現実においては，すべて抵抗や摩擦によるエネルギー損失によって止まると考えているため，空気抵抗がないから止まらないと考えたようである（実際には反発係数が1/2からエネルギー損失がある）．また，指数関数 $x=1/4^t$ や $x=e^{-rt}\sin\omega t$ のような減衰振動の印象が強かったのかもしれない．横軸を時間軸にしボールの頂点の高さを縦軸方向にとると，この点は時間軸に接する2次関数のグラフの上にある．頂点の高さが1/4ずつとなり，時間を無視して考えてしまい指数関数と勘違いしやすい．たしかに実際には，速度が0に近い，または振幅が0に近いところ（微小の世界）では速度や振幅が大きいときの理論と違ってこの理論通りにはいかない．このようなことから，5年生は解答3を選択した者が少なかったようである．

問題2，3は理論的（数学的）に考えることを期待し，解答の選択肢から2の理論的に正しいが現実に反するという項目を削除したが，解答理由の中にはこちらの意図に反するものもあった．この2問は現実とはかけ離れた問題であり，特に問題3は黒板に大きく図をかき説明したが意味を捉えにくかったようである．

問題2については，収束すなわち到達と考えての間違いと収束しても極限であるから到達しないと考えた者がほとんどであり，経過時間について考えた者は少ない．特に3年生は無限級数を学習した直後であり，極限値のみを計算し即座に到達すると考えてしまた者が多かったようである．

問題3は直感的に考えた者が多かった（理由無記入者24.6%）．これも収束についての考え方は問題2と同じである．無限級数を学習した後の3年生以上の方が収束すなわちその値となる（到達する）と考える者が多くなっているように思える．これは関数の極限と無限級数の意味の捉え方の違いにあるように思われる．関数の極限においては収束するとき，極限値が関数の値となるのは連続の場合だけでであるため，極限値とはその値に近づくがその値とはならないということが強調され，逆に数列の極限，無限級数においては収束するとき，その値となるという印象を強く受けるためではないだろうか（マクローリン，テーラー展開など）．この問題は有限の距離を無限の時間をかけて動く例として考えた．現実のこのような運動の簡単な例があれば良かったのだが．

問題4については，理由まで正しく書けた者の率は学年を追うごとに高くなってきている．また，3年生で解答3を選んだ者の率が他学年より高い理由は，1996年度3年になって4月の初めに他の授業でこの話を聞いているためである．しかし，それにしては正答率は低いといえる．3年生に限らず調査以前にアキレスとカメの話を聞いたことのある者でも残念ながら正答率は49.7%と低く，聞いたことのない者の正答率45.0%と大きな違いはない．興味がない者にむりやり話をしても意識の中に残っていかないのだろうか．

問題2，3，4の解答の関連について考えると，学生の意識をある程度分析することができる．表8の理由（問題2，3，4）がすべて書けなかった者や誤った者について考察すると，

①解答分類1・1（問題2で解答1，問題3で解答1）は，時間的なことはいっさい考慮せず，収束しても極限であり，その値に近づくだけでその値になることは絶対にないという考えである．

②解答分類1・3はごく少数である．論理が矛盾しているように思えるが，問題2は速度が0に収束することより，原点に到達する前に途中で止まり，原点には到達せず，問題3についても同様に速度が0に収束するのでいつかは止まるという考えである．すなわち，収束すなわち到達またはその値となると考えている．

③解答分類3・1の約半数近くの者は速度が0にならないので少しづつではあるがいつまでも動き続け，問題2では原点に到達し，問題3では永遠に運動を続けるという考えである（速度だけで考えている．主に1・2年に多い）．残り者は問題2では距離について無限級数の値を計算し，収束すなわち到達（速度も0近づくのでちょうど到達）と考え，問題3では計算ができなかったので速度だけを考え，速度が0にならないので少しづつではあるがいつまでも動き続けるという考えである．後者は，問題3で動点の移動距離が有限（$\frac{1}{6}\pi^2$）であることわかっていれば解答の選択が違っていたと思われる．

④解答分類３・３は少数であるが，その理由は単純に収束すなわち到達またはその値となるという考えである．解答分類１・３と考え方は同じであるが，その相違点は速度だけで考えた場合と問題２は距離で問題３は速度で考えた場合の違いである．
⑤理由を誤った者の各分類の中でみると，問題４の正解率は収束すなわち到達またはその値となると考えている者の方が少し高いことがわかる（このように教えた方が良いという意味ではない）．

４－２　1997年度意識調査の考察

５年生については前年度に解説してあるため，調査時に注意として，「収束すなわち到達」と「収束しても近づくだけである」のどちらか一方の考え方に固執せず場面によっていずれか判断すること，この問題のような理想的世界でこれらの実験を行い，純粋に数学的な立場で観測していると想定し考えることの２点について話した．３，４年生については極限についての指導後に実施したためか，前年度調査より全体的に解答および解答理由の正答率が高くなっている．各年度の合計は実施学年に違いがあるため，単純には比較できないが対応する学年ごとに比較してもそれぞれ高くなっているといえる．問題により差があるが著しく高くなった項目もある．

また，経過時間を計算しようとして計算式や計算を間違えたり，距離を時間と勘違いして求めこの現象が起こるのは何秒以内であると理由を記している者もいた．考え方は正しいのだが正答とはしなかった．これらの結果から，極限や収束の概念のおおよその意味を直感的に理解できた者は増えてきていると推定できる．

解答理由の無記入者の割合が減っている．しかし，問題４については解答理由の無記入者は前年度とほぼ同じ割合であった．これは解答時間の制限があったかめか，問題１～３までの理由をかくのに手間取り時間不足であったと考えられる．

問題１(2)，問題３は前年度調査では解答理由がほとんど間違っていたが，両問とも今回の調査では全体で約３分の１，５年生は半数以上が解答理由が正しく書けており，指導の効果があったと感じられる．

問題２の解答理由の正答率が４，５年生は他の問題より良くない．問題文が（黒板に描いて説明した図も）１秒単位に物体の運動を記述しているので，この表現のため距離や速さにばかりに目を向け，距離の総和や速さの極限の計算をしてしまう誤答が多かった．かえって，教える側が単純な問題と考えているものの方が学生にとっては落とし穴なのかもしれない．

参考までに今年度，大学生（２年生71名）にも同じ意識調査を前年度と同じ方法で実施してみたが，前年度の３，４，５年生と大差のない結果であった．極限や無限についての理解度が，高専だから特別悪いということも特別良いということもないと考えられる．

最後に，普段の授業でもこちらの指導したことをすべての学生が受け入れ，理解してくれるものではないように，今回の指導も解答理由の正答率が高まったといっても学生全体からみれば30%～50%であり，少ないといえば少ないのだが，少しでも多くの学生に徐々にではあっても理解を促す努力が重要であると考える．

５．指導上の留意点と指導方法

５－１指導上の留意点

関数の極限，無限級数について，使う場面の違いによるためか捉え方に意識の違いがあるが，本来はどちらも考え方は同じであるので，統一的な指導の必要性を感じる．

19996年度は予想通り，無限回試行すなわち永遠の時間を要すると考えている学生が多かった．したがって，$n\to\infty$ が時間的なものではなく（この記法は果てしなく続く―永遠というイメージに誤解されやすい），直観的には試行がある意味で有限時間内に無限回行われると想定されていることに注意を促す必要もあると考えられる．そのためにも，アキレスとカメのように無限回の試行の後にさらに続く事柄があるという概念を理解させるために，ε_0 までの無限順序数（初めの部分だけでも）を導入するのもよいのではないだろうかと考える．

数学においては時間的なことがらについてはあまり扱わないのが普通であるが導入時に例をあげて説明した方が良いのではないだろうか．高専においてはより現実的な問題を扱うことが多いため，物体の運動等を考えるとき，極限が収束すなわち到達する，収束しても近づくだけで到達しないという両面の考え方ができるように指導する必要があると思われる．

５－２具体的な指導について

1997年度においては，３，４年生にこの調査を実施する前に１時間の授業を使って次のようなような内容を指導した．

(1) 現実のモデル化

数学は現実をモデルとして，現実を抽象化，理想化した理論的体系であること，数学の中で推論されたことがフィードバックされ現実の世界に適用できることについて説明した．具体的な例として面積な

どを取り上げ以下のような説明をした.

(2) 現実のモデル化の具体例

現実の広がりを表わすものとして，長方形の面積から考え（基本的な考えである面積＝縦×横がなぜ現実の広がりを表わすのかまでと加法的性質を有することは説明できなかった），円の面積の計算公式については，円の中心から放射状に2n等分し切断して交互に並べ長方形に近い形を作り（近似的に）面積を考えることができることを説明した．（説明はできなかったが，σ－加法性を仮定し）区分求積による面積の求め方が積分に拡張されていることを説明し，これらのすべてが極限や近似に関連していることに注意を促した.

(3) 無限和について

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2$ については，本来は部分和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$ が2に近づいていくという意味であるが，無限回の足し算が実行されたと直感的に考えることも可能である．現実にはこの無限回の足し算は実行不可能であるが，ある意味で現実のモデルとなっていると考えられる．具体的にはこのことについては(5)で説明を加えた．これはたとえば，アキレスとカメやボールのバウンドもそのひとつといえるがここでは調査項目と重なるのでこれらについては調査後に問題を解説する中で説明をすることにした.

(4) ε_0 までの順序数について

有限時間内に無限回の試行が実行可能であるというモデルを考えるには，自然数だけで回数を考えているのでは現実をモデル化することはできない．そこで，$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots\cdots\cdots$ のような順序回数を考える．ここでの ω は今までの ∞ と同じ意味で考えることにする．これは次の集合の中に大小関係で順序をいれたものと同じである.

集合 $\{m-1/n \mid m=1,2,\cdots\cdots,n=2,3,\cdots\cdots\}$

これは，ε_0 までの順序数のうち，ω^{ω} までの順序数であるが授業においては $m=1,2$ のときの 2ω までのモデルについて扱い，混乱を招かない程度の説明に留めた．ε_0 までの順序数を実数の中に埋め込むことは可能であるが，極限や収束の概念を指導する上では必要はない．しかし，$2\omega, 3\omega$ 程度は指導した方が良いと思われる.

(5) 収束に関するするスピード

現実の具体例ではないが，数学的に物体の運動の次のような例を挙げて，

①原点からスタートし，初めの1cmは1cm/sの速さで，次の1/2cmは1/3cm/sの速さ，次の1/4cmは1/9cm/sの速さで（n 回目は $1/2^n$ cmを $1/3^n$ cm/sの速さで），運動したときの物体の移動距離，収束点と経過時間を説明した.

②原点からスタートし，初めの1cmは1cm/sの速さで，次の1/3cmは1/2cm/sの速さ，次の1/9cmは1/4cm/sの速さで（n 回目は $1/3^n$ cmを $1/2^n$ cm/sの速さで），運動したときの物体の移動距離，収束点と経過時間を説明した.

この物体の運動を考えるといずれも有限の距離を物体は速度を落としながら収束していくが，収束するのに（有限の距離を移動するのに）①は無限の時間を要し，②は有限時間内に収束する．このことから直感的に考えると収束とは，近づいてはいくが到達しない，近づき最終的に到達することをモデル化しているといえることを注意した.

「収束すなわち到達」，「収束しても近づくだけである」という両面の考え方を場面によって判断し，一方の考え方に固執しないことを強調し指導する.

(6) 近似値計算について

内容的には(5)の意味とは異なるが，極限の収束のスピードの具体的な例としてπの近似値計算を取り上げた.

$1/(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots$ を0～1まで広義積分し，無限級数 $\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+\cdots\cdots$ を導き出して，これを利用した近似値計算の方法と $\mathrm{Tan}^{-1}x=x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+\cdots\cdots$ であることと $\pi/4=4\mathrm{Tan}^{-1}(1/5)-\mathrm{Tan}^{-1}(1/239)$ を利用した近似値の計算の方法を示し，近似値計算で収束するスピードがいかに重要か指導した.

ここでは説明することができなかったが，これ以外に関数列の収束に関する各点収束，一様収束などについて高専では詳しく取り扱わない内容であるが，指導する必要性を感じる.

5－3 指導の効果について

アンケート集計結果や考察にも記したように，解答理由の正答率1％程度であった問題が25％～50％前後となるなど，このタイプの極限についての理解に対して効果があった考えられる.

6．今後の課題

このアンケート調査の分析，無限や極限の概念を理解させるために，各点収束や一様収束の概念も含め各学年ごとに学年に応じた教材の選択や指導方法を工夫して指導案を作成し，工学を勉強する学生に適した授業を実践することが重要であると考えられる．このことについては現段階ではまだまだ十分とはいえず今後の課題とし継続して考えていきたい.