

多重解テイラー渦におけるモードの 形成条件 (自由端の場合)

戸谷 順信*・中村 育雄**

Configurational condition of the multiple Taylor vortex flow (In the case of an asymmetric condition)

Yorinobu TOYA and Ikuo NAKAMURA

Taylor vortex flow has several flow patterns (modes) in the same condition at small aspect ratio. The primary mode that is formed by increasing Reynolds number (Re) gradually from zero has a unique pattern with two normal cells having inward flow direction on the bottom end plate and the other cell's having outward flow direction in the upper position. And the secondary modes that are formed by increasing Re rapidly have several flow patterns with the normal cell or with an anomalous cell. An anomalous cell has outward flow direction on the bottom end plate. The number of the modes appearing according to the various ways of increasing Re is countered. The entropy is calculated and clears the complication of the bifurcation of the modes. The processes of the formation of modes are illustrated and discussed. Finally comparison of the results with the symmetric and the asymmetric conditions is discussed.

1. 結 論

同軸回転二重円筒間のテイラー渦流れは流体安定問題のパラダイムの一つとして活発に研究されている。多数の理論は無限円筒を仮定し、実験もアスペクト比 Γ を大きくとって端面の影響を小さくしたものがほとんどであるが、 Γ の小さい場合を理論、実験の双方から調べ、テイラー渦の研究に新しい展開をもたらしたのが Benjamin である⁽¹⁾⁽²⁾。その後、多くの研究が Γ の小さい場合についてなされてきた⁽³⁾。著者らは Benjamin によって提唱された、 Γ の小さい場合のテイラー渦の主モード、2次モード、正規モード、変異モード状態を上面が自由表面である自由端と固定端の場合に、その発生条件、渦の構造の観点から詳細に調べてきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。変異モードの存在については議論がなされてきたが⁽³⁾、著者らの可視化写真によれば端面上における外向き流れを持つ変異セルが疑う余地なく存在する⁽⁶⁾。

2次モードの発生は興味ある問題であるが、その発生状態を Re の上昇のさせ方を変えて系統的に調べた例は少なく、固定端の場合においてのみ、東らの数値計算⁽⁷⁾⁽⁸⁾、Bielek と Koschmieder の実験結果があるようである⁽⁹⁾。東らは主モードと2次モードの一つの発生を

* 機械工学科 講師

** 名古屋大学 教授

原稿受付 平成5年9月22日

計算し注目されるが、同条件下で実験的には確かめられている他のモードには言及していない。Bielekらは多数回の実験を行っているが、モード発生の確率や渦の形成過程の詳細は述べられておらず、また、著者らの確認したのとは異なり奇数個の渦はないとしているが、それは数値計算の結果をそのまま認めたもので十分なものとはいえない⁽⁹⁾。一般に報告されている研究には固定端の場合が多く、自由端における研究は古くはCole⁽¹⁰⁾、Snyder⁽¹¹⁾の研究があるが、アスペクト比が非常に大きく Benjamin 以後の端面の影響について考慮しているという意味では自由端の場合の研究は見当たらない。

本研究は自由端の場合において、多様なパターンが生じ、Re 減少時の分岐は比較的単純なことが分かっている $\Gamma=4.9$ の場合 (図3) に問題を絞って、最終 Re と回転数の直線的増加率を変えて各モードの発生頻度や、渦の形成過程を調べて、この流れの複雑な分岐過程の一端を明らかにしようとしたものである。著者らは従来よりアスペクト比が小さいテイラー渦流れに関する実験をすべて固定端と自由端について行っており、二つの境界条件における違いを明らかにしてきた。固定端については既に報告してありレイノルズ数の増加の仕方によってモードの発生頻度、形成過程の違いについて調べ、分岐過程の一端明らかにした⁽¹²⁾。本報も前報の固定端の場合における実験に続くものであり、最後に固定端と自由端における分岐関係、形成過程の比較も行う。

本問題は広く見れば外的条件が非定常なテイラー渦の問題である。関連した Γ の大きいテイラー渦の変調 (modulation) の研究⁽¹³⁾についてはいくつかの条件で行われているが、その内容については既報⁽¹²⁾を参照されたい。

本論文で用いる記号は次のようである。

R_1, R_2 : それぞれ内外円筒半径 (本装置では $2R_1=79\pm 0.1\text{mm}$, $2R_2=119.1\pm 0.1\text{mm}$)

D: 内外円筒の隙間 ($D=R_1-R_2=20\pm 0.1\text{mm}$)

L: 作動流体の円筒軸方向高さ

Γ : アスペクト比= L/D

ω, ω_0 : 内円筒角速度, ω_0 は最終角速度

ν : 作動流体の動粘度

Re: 最終レイノルズ数, $Re=\omega_0 R_1 D/\nu$, 回転数変化時には $\omega R_1 D/\nu$ を意味する。

T: 内円筒が静止から ω_0 に一定加速で達するまでの時間

St: 無次元加速パラメータ, $St=1/\omega_0 T$

その他の記号はその都度定める。

2. 実験装置と方法

実験装置を図1に示し、主要寸法は記号表に記した、内円筒はステンレス製、外円筒は透明アクリル製で、その外側にアクリルの四角い槽がある。この四角い槽は透明液体が満たされ可視化像の屈折を補正し、また作動流体の温度管理の役割をする。内円筒はサーボモータにタイミングベルトで連結されて回転する。本装置は渦の可視化を容易にするため従来のものより大きい⁽⁴⁾。

作動流体は体積比約 1:1 の水とグリセリンの混合液であり、トレーサとしてアルミ粉を混入し可視化した。Re を任意に変化させる方法は内円筒の回転数で行う。よって作動流体

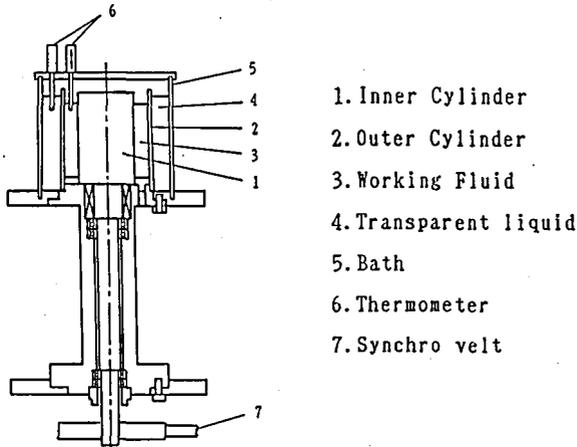


図1 実験装置

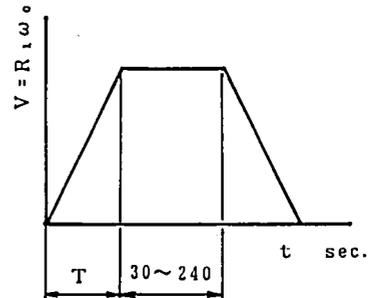
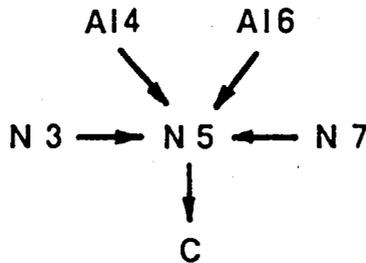


図2 内円筒回転速度の履歴



- N 5 : Primary Normal 5 cell Mode
- N 3 : Secondary Normal 3 cell Mode
- N 7 : Secondary Normal 7 cell Mode
- A 1 4 : Secondary Anomalous 4 cell Mode
(with anomalous cell on the lower end plate)
- A 1 6 : Secondary Anomalous 6 cell Mode
(with anomalous cell on the lower end plate)
- C : Couette Flow

図3 流れのモードと Re 減少時の分岐関係
($\Gamma=4.9$)

の動粘度は一定になるように作動流体の温度を $25 \pm 0.5^\circ\text{C}$ に保持する。サーボモータ (山洋電気社製 BL820 BM060BXT) は回転数とその回転数に達するまでの時間をディジタル位置決め装置 (同社製 PDC-F-112) でディジタル制御できる。回転速度の変化の様子を図2に示す。この回転数と時定数は Re と St の値を決定する。回転数はパルス列に比例しており、本装置のモータ軸における回転数制御の精度は最小移動量が $360 \times (1/4000)$ 度/パルスに設定されている。

本実験は自由端の場合を行ない、 Γ は4.9に設定した。流れの断面観察にはスライドプロジェクタを使用し、5 mm 幅のスリット光を方位角方向に垂直に照射した。流れの断面の

様子はビデオカメラで撮影、記録した。ビデオカメラは1コマの撮影を1/30秒で行ない、流れの形成過程を解析するために適当な時間における流れの画像をビデオプリンタで出力した。

本実験条件である自由端の場合で、 $\Gamma=4.9$ において安定に存在するモードは既に報告されており⁽⁶⁾、 Re が除々に減少したときの流れの分岐図を図3に示す。ここで $N5$ は主モードで、その他のモードは2次モードを表わす。特に、 $A14$ 、 $A16$ は変異セルが下端面に存在するモードを意味する。

実験は以下の方法で行った。 Γ が大きい場合の直線加速の研究には速度ゼロからのものと、クエット流状態で一定回転しているところからのものと2種類ある。ここでは初速度ゼロから行った。すなわち、流れの初期状態を目視で静止と認められる状態から、設定した ω_0 まで、設定した T で図2のように増加させ、発生した渦モードを観察する。図2のように円筒を静止させ、同じ実験を繰り返す。このような流れの特性時間は作動流体の高さ方向に対し、 L^2/ν 、隙間方向に対し D^2/ν 、スピンアップ時間として $L^2/\nu\omega_0$ などがある⁽¹¹⁾。有限長テイラー渦の場合には $\sqrt{L^2/\nu}$ が重要とされ、Snyderは渦状態が定常になるまでに $0.15L^2/\nu$ が必要としている。本実験では $0.15L^2/\nu=177.8\text{sec}$ 。 $(\nu=5.4)$ となるので4分間を流状態を安定化させる時間にとった。本実験では $T=0.01\sim 4.00\text{sec}$ であり、 L^2/ν に比べかなり早い。

このような加速でどのモードが発生するかは、これまでの実験から一意的でないことが分かっているので実験は一組の条件、すなわち (Re, St) の一組に対して100回行った。 Re は6種、 St は6種で以下に示したものだけでも3600回の実験である。ちなみにBielekらは976回実験したと述べている⁽⁹⁾。なお、固定端の場合で2種の Re 、6種の St について、各300回観察したが、100回の場合と基本的な差はなかった。今回自由端においては行ってないが、同様であると考えらる。

3. 実験結果と考察

3.1 各モードの発生頻度について

Re と St を変化させたときの2次モード(図3参照)の発生回数の頻度分布を図4に示す。各グラフは Re の値を変えたものである。図において $\{100-(\text{全2次モード発生頻度})\}$ が主モード(図3、の $N5$)の発生頻度を示す。100回の実験なので頻度は発生確率をパーセントで示したことになる。図より Re と St の値により主モードの発生頻度がかなり異なることが分かる。図は略すが、 $Re=650$ では St の値にかかわらず100%主モードであり、 Re が小さい場合は St の影響は見られない。 $Re=1250$ では主モードの発生頻度が減少し、それは St の値によって異なる。しかし、 $St=36\times 10^{-2}$ では60%程度に主モードは減少する。特に $Re=3780$ では主モードの発生頻度は St が 2×10^{-2} では50%以下と非常に小さい。 $Re=1900$ 、 2540 と 3140 では主モードの発生がほとんどである。よって Re が低いある範囲で2次モードが発生し、 Re が増加すると一旦主モードの発生が増加するが、さらに Re が増加するとまた、2次モードが発生するようになるといえる。 $Re=3780$ では主モードは波動テイラー渦にホップ分岐しているの、これ以上の Re については実験を行わなかった。また、各 Re で St の値が揃っていないのも波動渦発生条件が違い、それ以前の分岐を調べたためである。

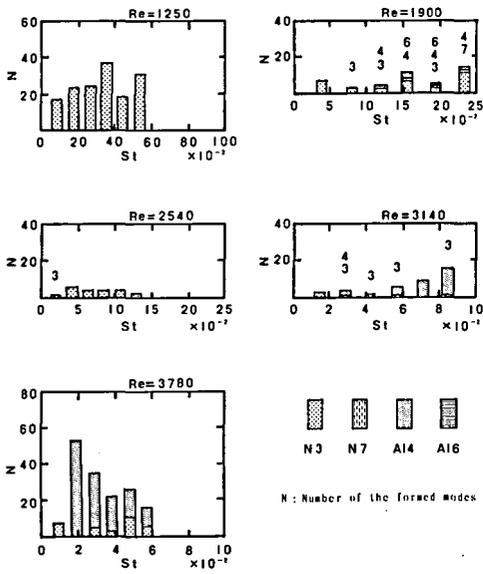


図4 各モードの発生頻度

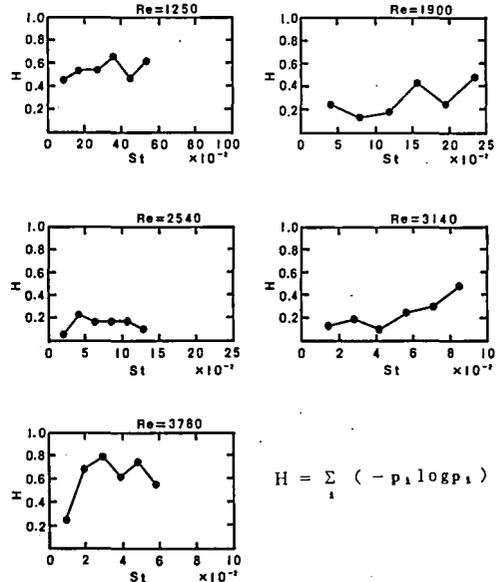


図5 各場合の情報エントロピー

各2次モードの発生頻度は図4中に印付けして示した。Re=1250では3セルモードが発生している。Re=1900と2540では主モードの発生頻度が高いため2次モードはあまり発生していないが、発生している内訳を見るとRe=1900では最もモードの種類が多く、Stにもよるが全種類が発生している。このことは固定端においてRe=2000で2次モードの発生が多かったが、Re=3000では主モードの発生頻度が増加したと類似している⁽¹²⁾。Re=3140, 3780では変異4セルモードの頻度が高い。特に変異4セルモードがRe=3780でかなり発生している。3セルモードはRe=650を除く全てのReでほとんどのStで発生している。3セルモードは固定端における変異3セルモードと対応している。

同じアスペクト比で存在する2次7セルモードがほとんど発生していないが、これは以下の理由による。即ちRe=650の場合に一旦7セルモードが発生することがあるが、その後主モードに分岐する。本実験はReを変化させて最終的に安定して存在するモードを調べたため、2次7セルモードは発生しないという結果になった。2次7セルモードを発生させるには一旦発生した7セルモードの状態が崩壊する前にReを適当に変化させて安定化させなければならない。このことは固定端において6セルモードが発生しにくかった結果と対応している。

3.2 各場合の情報エントロピー

固定端の場合⁽¹²⁾で述べたように、マクロには同一条件とみなされる実験で発生渦パターンが確率的にしか定まらぬことは、分岐が複雑で、流れがその点近傍で不安定であることによると考えられる。このような系の挙動を明らかにするには実験的にも数値的にも困難であり、流れの力学に立ち入ることなく現象として表現することを考えてみると、図4の各場合のパターンの分類に情報エントロピーを利用することが考えられる。情報エントロピーが現

象を観測することによってもたらされる情報量という直観的解釈を持つことによる⁽¹³⁾。

情報エントロピー H は今の場合、ある Re で、ある St 対し、

$$H = \sum_i (-p_i \log p_i)$$

で定義される⁽¹³⁾。ここに p_i はその (Re, St) の場合の各モードの発生確率を示す。

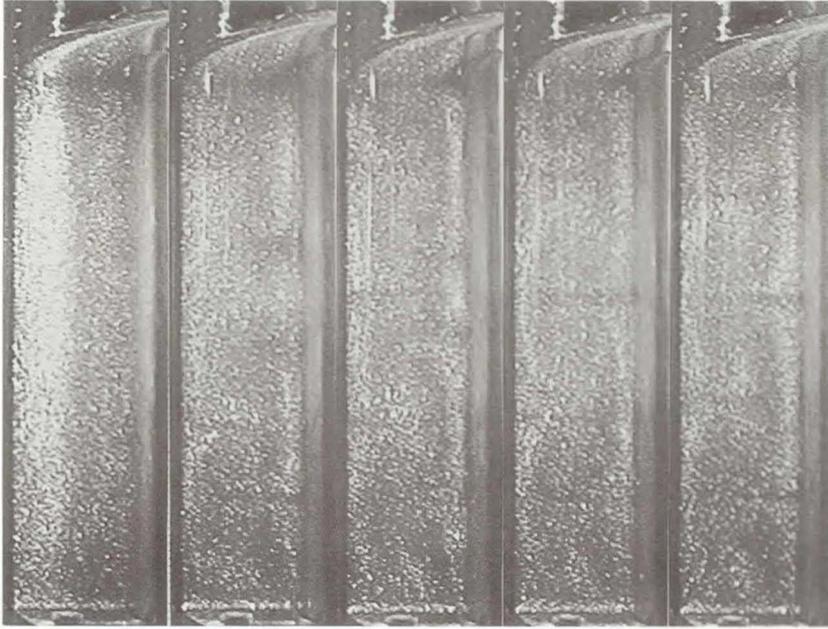
図5は各 Re についての情報エントロピーを示したものである。 $Re=650$ の場合は上述のようになっているので図示していない。 $Re=1250$ では全体的に H は大きく0.4以上になっている。よって比較的その分岐関係は複雑である。 $Re=2540$ では St 全体にわたって H は低く、 $Re=1900, 3140$ では St が小さい範囲では H が小さいが、 St が大きいと H も増加している。よって、同じ Re でも St が大きの場合、分岐関係も複雑さを増すと思われる。さらに、 $Re=3780$ では St が小さいときは主モードがほとんど発生するため、 H は小さいが、 St が増加すると、 H は大きくなるので全体にわたり分岐関係は複雑であると思われる。情報エントロピーの値そのものは定性的な意味が強く、既報⁽¹²⁾で述べたように300回の実験で基本的な差はなかったため、図5の各値の相対関係は意味あるものと思われる。定量的な判断はしにくいですが、もし情報エントロピーが分岐の複雑さをある程度表わすものであるならば、固定端と自由端の場合の複雑さを比較すると、全体的に固定端の方が情報エントロピーが大きく複雑な分岐関係であるといえる。

ここで、このような分岐現象でどの分岐が選択されるかについては固定端の場合と同様であると考えられる。2次モードの解はいずれも主モードの解とは切り離された分枝上にあると考えられている⁽⁹⁾。本実験のようにいくつもの解が同一と考えられる条件でランダムに生ずることはこれらの分岐が近接して存在することを示している。そのどれかが選択されるかは装置に起因する不完全分岐によるものか、完全静止にはできないための流体力学的ゆらぎによるのか明らかではない。装置の不完全さも回転同筒のガタ、振れ回りとか、モータの回転数の不均一によるのか様々である。自由端の場合と固定端の場合を比較すると自由端の場合の方が情報エントロピーは全体的に小さかった。よって解の分岐関係は固定端に比較して自由端の方が複雑ではないといえる。装置の幾何学的条件からいえば、自由端の場合、上面が自由表面であり非対称であるのに対し、固定端の場合、上下端の対称性が完全であるとは考えない。そのために分岐の複雑さが大きくなったと考えることはできる。しかし、どちらの場合にも分岐の複雑さが存在するので、その複雑さは、渦モード発生のパラッキからみると、装置の不完全性よりもむしろ、初期の流れが完全静止でないこと、特に僅かな対流などの初期状態によると考えるのが妥当と予想される。

しかし、再度ここで強調したいのは、現実には初期状態は無限に存在し、 Re の増加の仕方は幾つかあるにもかかわらず、最終的に落ち着く安定した流れの状態、すなわちアトラクタは4つ(N5, N3, A14, A16の各モード)存在するのであり、我々の従来の実験結果から $\Gamma=4.9$ で実際に存在するアトラクタは5つ(上記のモードにN7を加えたもの)しかないということである。

3.3 モードの形成過程について

Re と St の値によって発生するモードの種類及び頻度が異なることが明らかになったが、その具体的なモードの形成過程は複雑であり一様でない。本実験では形成過程の異なる様子

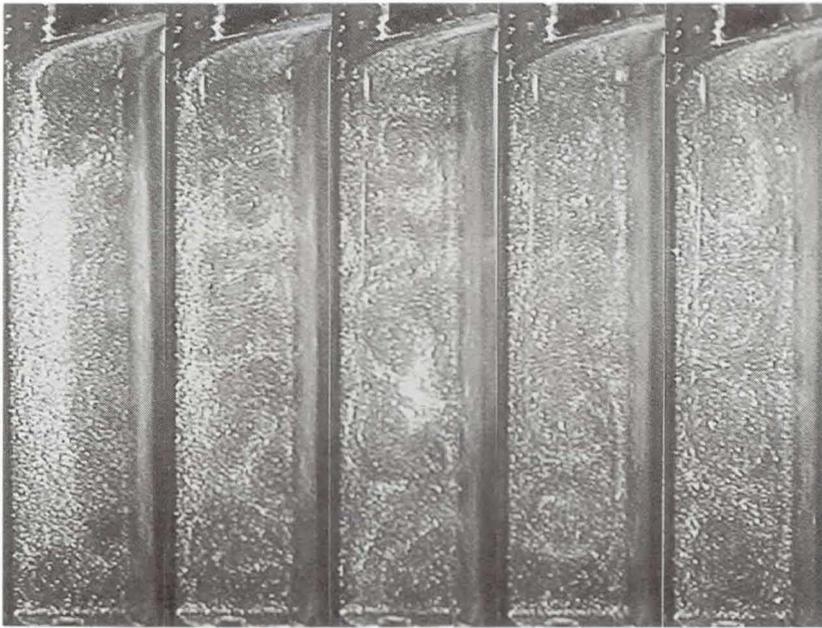


(a) $N=5$; $Re=650$, $St=100 \times 10^{-2}$



(b) $N=3$; $Re=1250$, $St=26.8 \times 10^{-2}$

図6 テイラー渦の形成過程の断面画像



(c) A14 ; $Re=3780$, $St=2.9 \times 10^{-2}$

図6 テイラー渦の形成過程の断面画像

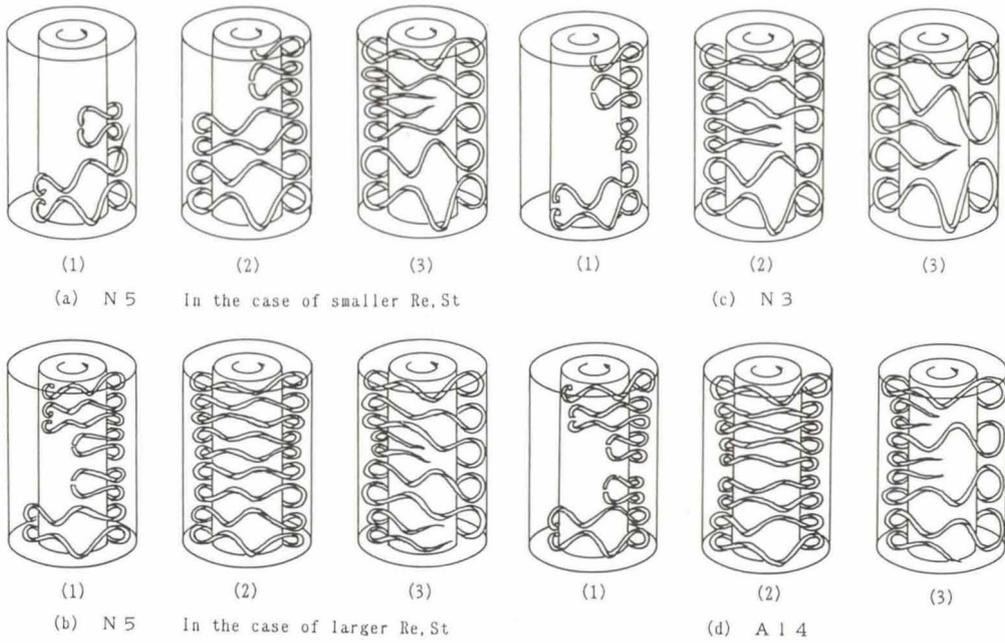


図7 テイラー渦の形成過程の模式図

をビデオカメラで撮影し、その画像をビデオプリンタに出力し確認した。その各モードの形成過程は一通りではないので、各モードの代表的な形成過程を図6に示す。

ビデオ画像を詳細に観察することにより、以下のことが判明した。

- (1) テイラー渦は回転による遠心力により内円筒表面から発生する半径方向の流れと、端面の影響により内円筒と端面の角に発生するプラントルの第1種の流れである2次流れとの時間的な差がモードの形成過程に影響する。
- (2) 2次流れは半径方向流れが発生する前に発生する。しかし、2次流れは Re が650程度の小さい値でない限りモードの決定に影響しない。
- (3) 2次流れと半径方向の流れは Re が大きいほど、また、 St が大きいほどその時間的差は小さい。
- (4) 半径方向の流れは Re が小さい場合、端面上に発生する2次流れの影響で下端面側から発生し、順次、上面よりに発生する。 Re が大きい場合、下端面から2次流れが発生し、続いて自由表面における半径方向の流れが発生し、最後に円筒の中央部分で半径方向の流れが発生する。
- (5) 2次流れに比較して半径方向の流れは運動量が大きく、発生場所が中央によるほどその傾向が強い。

以上の内容からモード別に発生の内容をまとめ、テイラー渦流れの形成過程の様子を主モードであるN5について Re の増加条件が異なる場合と2次モードの代表としてN3とA14を模式図にして図7(a)~(d)に示す。各図は順次、時間の経過による流脈の変化の様子を表わしている。内円筒は矢印の方向に回転している。主モードは Re が準静的に増加する場合と急加速の場合で異なり、(a)の主5セルモードは Re が小さいと下端面上における2次流れが発生し、次第に上の方へ向かって半径方向の流れが発生する。最上部の渦対の発生と表面において外円筒方向の流れのセルは同時に発生する。本実験で行った $\Gamma=4.9$ の場合、初め7セルの状態が形成されるが、3対のセルのうち上の2対の渦が次第に不安定になり1対になり、最終的に5セルを形成する。(b)は Re が大きくなると上下端面上で2次流れおよび半径方向の流れが発生する。また、半径方向の流れは比較的早く発生し、多くの渦が形成される。その後、運動量の大きい流れが次第に他の流れを吸収し5セルになる。既に述べたように回転円筒中央付近に発生した渦の方が運動量は大きい、最終的にどの渦が残るかは初期状態に依存する。主モードに対して2次モードである変異4セルモードの(d)は Re と St が大きい場合、半径方向の流れから発展する渦の数が多く、N5の場合と比較し、各渦が発生する時間にはほとんど差がない。よって中央よりの運動量の大きい流れが発展してできた渦が端面よりの渦を下端面側へ押しやり、他の渦に吸収させてしまう。通常なら対を成して存在する渦対のうち一つの渦だけが吸収崩壊し、下端面上に変異セルのみが残ることになる。

3.4 固定端と自由端における比較

二重円筒間の上端面の境界条件の違いはそこで発生するテイラー渦流れの安定構造を異なったものにしていく。テイラー渦がその形成過程から各々主モードと2次モードに、渦構造から正規モードと変異モードに分類されることは既に報告している。その分類の詳細は文献を参照されたい^{(4),(5)}。固定端と自由端において構造安定に存在するモードについて Re を減少させたときの分岐関係を固定端の場合は $\Gamma=4.0$ 、自由端の場合は $\Gamma=4.9$ について図8に

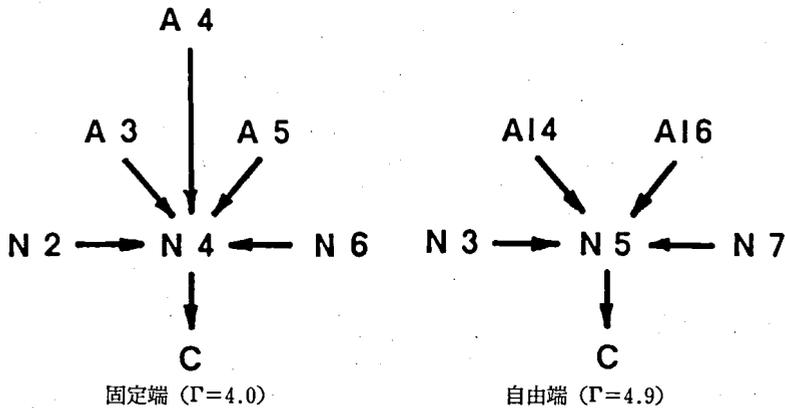


図8 流れの分岐図

示す。自由端の図は図3と同じものである。各 Γ においてこれ以外のモードは存在しない。固定端の場合に安定して存在するモードの方が1つ多く存在する。これは固定端において存在するモードの一つが自由端では波動テイラー渦状態でしか存在しないことから除いてあるためである。

2つの場合において、実験では Re の増加の加速時間は $T=0.01\sim 4.0$ 秒と同一である。6つの種類で行った最終 Re は各 Γ における主モードがホップ分岐して波動テイラー渦になる臨界 Re の値が異なるため、二つの場合で異なっている。既報と本報の結果から二つの場合において以下のことが明らかになった。

- (1) 固定端の場合で、主モードの発生頻度がかなり小さく、最低で4%であった。自由端では主モードの発生頻度は最低で47%であった。
- (2) 固定端の方が一つの Re で発生するモードの種類が多く存在する。これは St の値が変化してもいえることである。このことは固定端の方が自由端より情報エントロピーが大きいことに通じる。
- (3) 情報エントロピーが定性的な意味だけでなく、定量的な見方ができるとすれば、エントロピーは固定端の方が全体に大きい値を持つ。これは分岐関係が固定端の方が複雑であることを意味することになる。
- (4) 固定端も自由端の場合も Re の値により情報エントロピーが変化する。特に、 Re が小さい場合エントロピーは大きく、 Re が増加すると一旦は減少するがさらに Re が増加すると再び増加する傾向にある。
- (5) 固定端も自由端の場合も St が小さいとエントロピーは小さいが、 St が増大すると Re に依存して変化する。

4. 結 論

アスペクト比が小さいテイラー渦において、自由端の場合で特に、 $\Gamma=4.9$ の条件において Re と St の変化に対する各モードの発生頻度を実験的に調べたものである。主な結論は以下のようである。

- (1) Re と St の値によって主モードと2次モードの発生頻度が異なることがわかった。特に Re によって発生頻度が大きく変わり、同じ Re の値でも St によって変わることがわかった。
- (2) 2次モードは Re によって発生するモードの種類が異なり、さらにその発生頻度が異なることがわかった。また、同じ Re でも St によってモードの発生頻度が異なることがわかった。
- (3) Re と St の変化により発生するモードが異なる現象、すなわち、多重解を持つテイラー渦の分岐関係の複雑さを情報エントロピーで表現することで定性的に明らかにした。
- (4) 各モードの形成過程はそれぞれ特徴があることがわかった。モードの選択決定は Re と St の値により半径方向の流れと上下端面上の2次流れの発生時間差と運動量の大きさによるものであると思われる。
- (5) 固定端と自由端において、どちらの場合も Re と St の値によって発生するモードが決定され、モードの発生頻度の Re と St の影響は定性的に類似しているところがあった。また、その分岐の複雑さはどちらかという自由端の方が小さかった。

参 考 文 献

- (1) Benjamin, T. B., Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 359, (1973), 1.
- (2) Benjamin, T. B., Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 359, (1978), 27.
- (3) 最近の展望は, Mullin, T. IMA J. Appl. Maths. 46, (1991), 109.
- (4) 中村・ほか3名, 機論, 56, 522, B (1989), 307.
- (5) 戸谷・ほか3名, 機論, 56, 532, B (1990), 3617.
- (6) 戸谷・ほか3名, 機論, 58, 546, B (1992), 305.
- (7) 東・ほか2名, 機論, 57, 535, B (1991), 905.
- (8) 東・ほか2名, 機論, 58, 555, B (1992), 3245.
- (9) Bielek, C. A. and Koschmieder, E. L., Phys. FluidsA, 2-9 (1990), 1557.
- (10) Cole, J. A., J. Fluid Mech., 75-1 (1976), 1.
- (11) Snyder, H. A., J. Fluid Mech., 35-2 (1969), 273.
- (12) 中村・戸谷, 機論, 投稿中
- (13) Donnelly, R. J., Proc. R. Soc. London, Ser. A, 281, (1964), 130.
- (14) 数理科学辞典 (広中編), 韓 XIV 情報理論, 大阪書店 (1991), 768.