

有限要素による膜材の リンクリング現象評価

遠藤典男*・永谷秀樹**・三井康司***・笹川明***

Numerical Evaluation of Wrinkling Phenomena on Membrane Structures Using Finite Elements

Norio ENDOH, Hideki NAGATANI, Yasushi MITSUI and Akira SASAGAWA

Some of the advantages of membrane structures are lightweight and collapsible and therefore easy to transport and erect. Furthermore, membrane structures have low installation cost, and are potentially relocatable.

However, it is important to consider the potential occurrence of negative stresses in membranes. Because of their negligible bending resistance, membranes have negligible buckling one.

In this research, a special tension field theory is used to predict extents of wrinkled regions and magnitudes of tension stresses for static problems. Numerical evaluation is carried out using two dimensional finite elements. To investigate the efficiency of this numerical technique, a few simple experiments are performed, where a concentrated force is loaded at the center of the square membrane model which is uni-axially prestressed and then, wrinkled waves are clearly observed.

1. はじめに

近年建設工学の分野において巨大膜構造物が注目されはじめている。例えば、恒久的構造としては、東京ドームに代表される室内競技場、また仮設構造物としては、中電浜岡原子力発電所工事に代表される、雨天対策に対する工事行程確保のためのエアドーム等が目新しい。これら膜構造物は、従来の重構造物とは異なり、軽量かつ比較的簡便に建設並びに撤去が可能である。このため、これら構造物の適用範囲は今後益々増加の傾向をたどるものと思われる。

* 土木工学科助手

** 信州大学大学院

*** 信州大学工学部

しかしながらこの建設気運の高まりにも関わらず、これら膜構造物の確固たる建設、保守、管理に対する指針が確定されていないのが現状である。これらは膜構造物を構成する材料特性、エアプレッシャー、リンクリング現象等、膜構造特有の要因が複雑に影響を及ぼしており、従来の重構造物に対する設計指針と大きく異なっていることに起因するものである。

本文は、これら膜構造に対する基礎的研究であり、リンクリング現象のみに的を絞って行ったものである。すなわち、膜構造物の応力解析において、リンクリングが順次発生してゆく領域の算定を有限要素を用いて数値的に評価する妥当性を検証したものである。

また、これら数値解析手法との比較検討のため、簡単な膜素材モデルによる実験も試みた。

2. 有限要素によるリンクリング現象の定式化

二次元直交座標系 $x-y$ において平面応力状態を考える。一般的な弾性体において、ひずみ ε_x , ε_y , γ_{xy} は、主ひずみ ε_1 , ε_2 を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2}(1+P)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1-P)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}(1-P)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(1+P)\varepsilon_2 \\ \gamma_{xy} &= Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\end{aligned}\tag{1}$$

ここに P , Q は

$$\begin{aligned}P &= \cos 2\alpha = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \\ Q &= \sin 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\end{aligned}$$

であり、 α は主ひずみのなす角である。また、リンクリングの発生した状態においても上式が成り立ち、さらに応力-ひずみ関係においても通常の弾性体と同様であると仮定すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \lambda\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \lambda\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{2}$$

ここに、 E , λ , G は、各々ヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数を表す。さらに、膜構造は引張応力とせん断応力のみ抵抗し、リンクリング発生後の圧縮応力を無視した一軸応力状態であると考え、各有限要素の応力関係は次式で与えられる。

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = 0 \quad (3)$$

$$0 < \varepsilon_1 \quad \text{and} \quad -\nu \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \quad (4)$$

ただし、 ν は膜材本来のポアソン比（定数）である。

以上より、ポアソン比 λ はリンクリング発生後において、主ひずみの関数として次のように表せる。

$$\lambda = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (5)$$

この関係を用いると、リンクリング発生後の応力マトリクス $[D]$ は以下のようになる。

$$[D] = \frac{E}{1-\lambda^2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\lambda}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

また、リンクリング発生後の応力-ひずみ関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(1+P)E \varepsilon_1 \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(1-P)E \varepsilon_1 \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}QE \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (7)$$

しかしながら、式(4)では $\lambda \geq 1$ という可能性が生じるため [D] の変形が必要となる。そこでいま、[D] を以下のように仮定する。

$$[D] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、 a, b, c, d, e, f は未定係数である。

ここで、一般的な応力-ひずみ関係をマトリクス表示すると

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (9)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

となる。式(8), (1)を式(9)に代入し、式(7)の関係を満足させると、以下の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} (1+P) & (1-P) & 2Q & 0 & 0 & 0 \\ (1-P) & (1+P) & -2Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+P) & 0 & (1-P) & 2Q & 0 \\ 0 & (1-P) & 0 & (1+P) & -2Q & 0 \\ 0 & 0 & (1+P) & 0 & (1-P) & 2Q \\ 0 & 0 & (1-P) & 0 & (1+P) & -2Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} (1+P) \\ 0 \\ (1-P) \\ 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

しかしながら、左辺の係数マトリクスは行列式が0となる場合が生じるため、 $b=0$ なる条件の下で未定係数を決定すると、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}E(1+P) ; d = \frac{1}{2}E(1-P) \\ c &= e = \frac{1}{4}EQ ; f = \frac{1}{4}E \end{aligned} \quad (11)$$

となる ($c = e$ なる条件でも同様の結果が与えられる)。 $c = 0$ ならびに $e = 0$ なる条件の下では、未定係数が不定となるため最終的な応力マトリクス $[D]$ の成分は、式(11)となる。

最後に、膜の応力状態は主ひずみに応じて次の3種類に分類される。

- 1) Slack 圧縮応力のみが発生し要素の剛性はない状態
- 2) Wrinkled リンクリングが発生している状態
- 3) Taut 圧縮応力が発生していない状態

解析時における、これらの判定条件を以下に示す。

$$D = \begin{cases} D_1; \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 0 & \text{(Slack)} \\ D_2; 0 < \varepsilon_1 \text{ and } \nu \varepsilon_1 < \varepsilon_2 & \text{(Wrinkled)} \\ D_3; \text{otherwise} & \text{(Taut)} \end{cases}$$

ここで、 D_1 を解析時の便宜上 $D_1 = \alpha D_3$ ($\alpha < 1$) と近似している。

3. 数値解析例および実験結果

先に示した数値解析手法の妥当性を検証するために、簡単な膜素材を用いた実験を試みた。本実験で使用した供試体は、ポリエステル基布にPVCコーティングを施した膜厚 $t = 1$ mmの膜材であり、これを大きき80cm×80cmの正方形に切断している。また、膜材の材料定数は表1に示す通りである。この膜材の中央に集中荷重を作用させ、これを順次増加させたときのしわの発生状況を観測する。

図1に有限要素による離散化状態を示す。節点数81、要素数は128であり、これを三角形一定要素を用いて離散化している。境界条件は膜材上部で x, y 拘束、下部では x 方向を拘束している。プレストレストとして膜材下部に2kgの荷重を作用させている。また、膜構造物の外力に相当する荷重は、供試体中央の◎に作用させる。

ヤング率	$E = 500 \text{ kg/cm}^2$
ポアソン比	$\nu = 0.25$
膜厚	$t = 1.0 \text{ mm}$

表1 膜材の材料定数

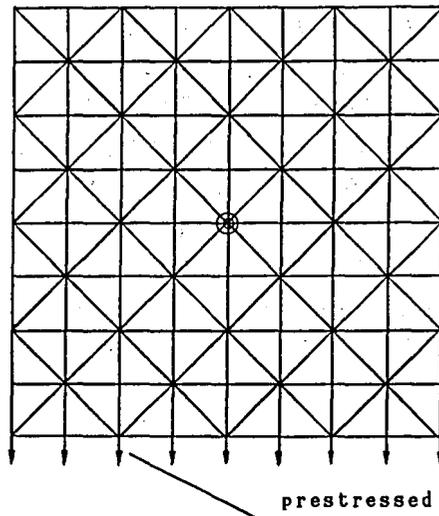


図1 要素分割図

図2は、本手法を用いて供試体モデルを解析したときの変位図である。集中荷重は、上から順に3, 6, 9 kgと増加させている。ただし、実際の変位の200倍を二点破線により図示している。集中荷重が載荷されている中央付近の節点変位は他に比べ大きく、荷重増分と共に順次増大してゆく様子がわかる。

写真1は、上から順に3, 6, 9 kgにおける膜材のリンクリングの発生状況を撮影したものである。ここで、写真が小さいために、細部でのしわの発生状況は見にくいものとなっているが、荷重の増加に伴い載荷点より上部境界左右端に向うリンクリングの発生が確認できる。また、荷重載荷点の下側においては、面外変形が生じており、これも一種のリンクリングに相当するものである。

図3は、本手法により解析した各荷重段階におけるリンクリングの発生予想図である。荷重段階は、写真1と同様、上から順に3, 6, 9 kgである。図中、塗りつぶされた要素はリンクリングが発生(Wrinkled)、あるいは圧縮応力のみが発生している(Slack)領域であり、白い要素は、圧縮応力が発生していない(Taut)領域である。ここで、荷重載荷点よりも下側では、左の写真に比し、かなり多くのリンクリングが確認されるが、これはSlack状態であり、写真では確認できないような微少な面外変形が生じているためである。このことを考慮すると実験結果と解析結果はよく一致していると思われる。

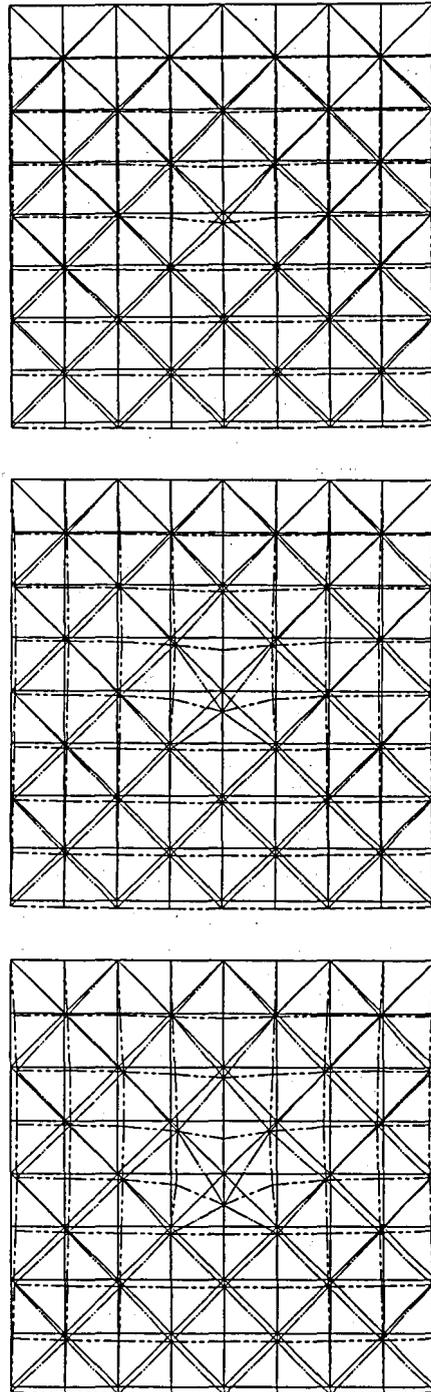


図2 変位図

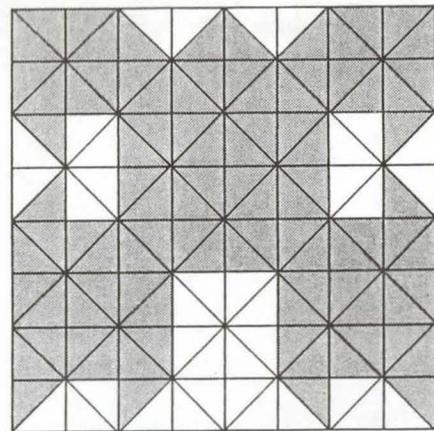
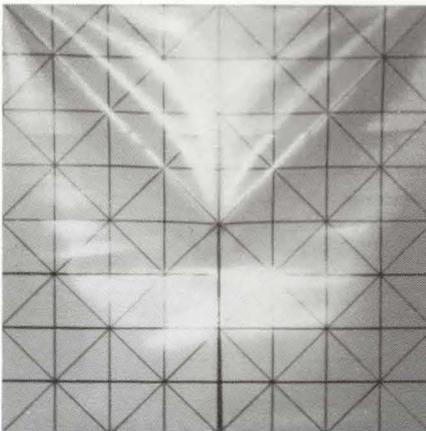
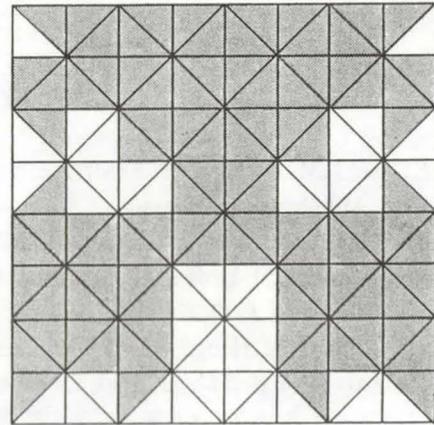
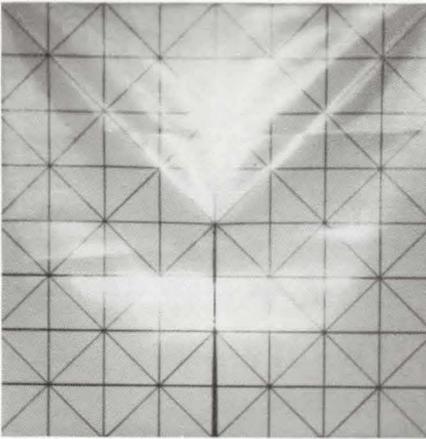
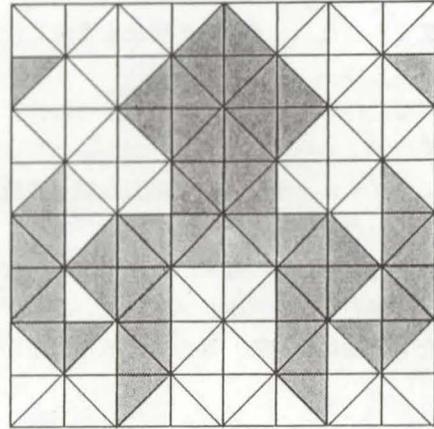
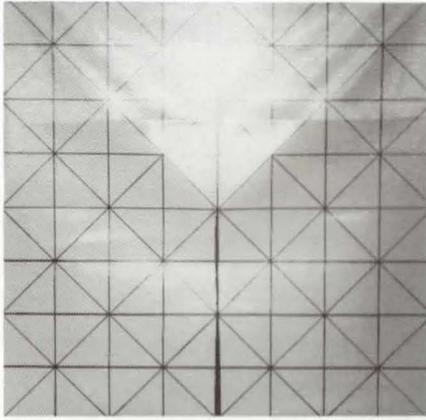


写真1 実験によるリンクリングの発生状況

図3 有限要素解析によるリンクリング発生予測

4. ま と め

本文で示したリンクリング現象を考慮した膜材の有限要素による定式化において得られた結論としては、

- 1) 膜構造物のリンクリング発生後の剛性評価は、実験値と数値解析によるリンクリング発生過程がよく一致しており、本手法の妥当性が確認できた。
- 2) リンクリング発生時の主応力状態を数値解析するため、微少なリンクリング（面外変形も含む）の予測が可能である。

という2点である。なお、今回は一軸的なプレストレストを膜材に作用させただけであったが、2軸的なプレストレスト、並びにエア・ビーム（円筒上の閉膜材に内圧を作用させ、剛性をもたせた構造物）等の立体的な構造物に対する発展が今後必要となるであろう。

謝 辞

供試体の提供に御配慮いただいた㈱太陽工業に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) M. Stein, J. M. Hedgepeth : Analysis of partly wrinkled membranes, NASA TN D-813, 1961
- (2) M. M. Mikulas, Jr. : Behaviour of flat stretched membrane wrinkled by the rotation of an attached hub, NASA TN D-2456, 1964
- (3) R. K. Miller, J. M. Hedgepeth : An algorithm for finite element analysis of partly wrinkled membranes, AIAA J. 20, 1761-1763, 1982
- (4) R. K. Miller, J. M. Hedgepeth, V. I. Weingarten, P. Das & S. Kahiay : Finite Element Analysis of Partly Wrinkled Membranes, Computer & Structures Vol. 20, No1-3, 1985
- (5) O. C. ツイエンキ-ヴィッツ著、吉織雅夫、山田嘉昭 訳：マトリクス有限要素法、培風館、昭和59年
- (6) 鷲津、宮本、山田、山本、川井 編：有限要素法ハンドブック、培風館、1981
- (7) 山田嘉昭：塑性の有限要素法、科学技術出版社、昭和63年