

# ハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構の 効率と軸トルク計算式\*

岸 佐年\*\*・両角宗晴\*\*\*

## Efficiency and Torque Formulas for the Hypocycloid Type 2K-H Planetary Gear Train

Satoshi KISHI and Muneharu MOROZUMI

A 2K-H type planetary gear train with two pairs of internal and external gears, the teeth difference between these pairs of gears are small, is called a hypocycloid type 2K-H planetary gear train. This type of planetary gear train can choice a wide range of reduction ratio and can be designed compactly. The efficiency and torque formulas of this planetary gear train are derived from the theoretical analysis and tabulated. The formulas tabulated can be utilized safely without any understanding of the underlying theory.

### 1. 緒 言

2K-H型遊星歯車機構としては幾つかの型式が存在するが、内歯車とそれにかみ合う外歯車との組合せを二組用い内歯車と外歯車との歯数差を1または2と小さく設定することによりK-H-V型遊星歯車機構に近い型式のものが考えられ、これをハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構と呼ぶことにする。そしてこの機構においては少ない使用歯車個数であるために小型軽量の減速機とすることができ、しかも一段で大幅に減速することができるため広範囲に任意の減速比を選択できるという利点をもっている。

本研究ではこのハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構について解析し、著者の内の一人が以前に示した遊星歯車機構の効率の分かり易い計算法<sup>(1)</sup>を応用して速比と効率および軸トルクの理論計算式を誘導する。

### 2. 解 析 理 論

図1はハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構を示す。この機構は太陽外歯車A、遊星内歯車D、太陽内歯車C、遊星ピニオンB、キャリアSから成り立っており、外歯車A、内歯車CおよびキャリアSが三本の基本軸である。この機構において外歯車Aの歯数 $z_A$ と

\* 平成2年3月29日 1990年度精密工学会春季大会学術講演会にて発表

\*\* 機械工学科 助教授

\*\*\* 信州大学 名誉教授

原稿受付 平成2年6月26日

内歯車Dの歯数  $z_D$  とを等しくした特別の場合は、K-H-V型遊星歯車機構と同等な機構となる。またこのハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構において内歯車Cの歯数  $z_C$  とピニオンBの歯数  $z_B$  との差を1または2とし、外歯車Aの歯数  $z_A$  と内歯車Dの歯数  $z_D$  との差を0または1あるいは2とするような小歯数差の内歯車と外歯車との噛み合いを利用した減速機では、少ない使用歯車個数でありながら広範囲に任意の減速比が採択でき、しかもコンパクトな減速機を得ることが出来るという利点がある。例えば後述する速比の計算式からも理解できるように、小歯数差の組合せを用いることにより速比  $u = (-1/7)$  から  $(-1/100)$  を実現できる。

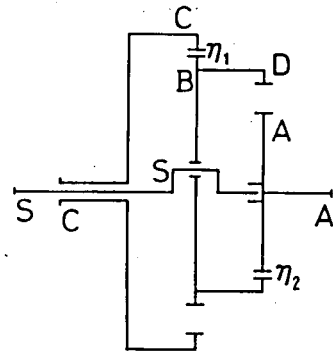


図1 ハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構

ところでこのような歯数差が0, 1, 2のような小歯数差の内歯車と外歯車との噛み合いでは、トロコイド干渉を初め種々の干渉現象が生じないように多くの成立条件をすべて考慮しなければならない。しかし内歯車と外歯車とに合理的な転位を与えることによりこれらの干渉問題は解決することができる<sup>(2)</sup>。いま歯車A, CおよびキャリアSの角速度をそれぞれ  $\omega_A$ ,  $\omega_C$ ,  $\omega_S$  で表し  $\omega_S$  は常に正方向になるように定める。また歯車A, CおよびキャリアSから遊星ピニオンBに作用する力をそれぞれ  $W_A$ ,  $W_C$ ,  $W_S$  で表す。

【S駆動, A従動, C固定の場合】

表1は内歯車Cを固定し、キャリアSを駆動し外歯車Aを従動させる場合の角速度を求めるための重ね合わせ法を示す。この表1より次式を得る。

$$\omega_A = \omega_S(1 - i_0) \quad (1)$$

ただし

$$i_0 = \frac{z_C z_D}{z_A z_B} > 1 \quad (2)$$

故に減速比  $u$  は次式から計算される。

$$u = \frac{\omega_A}{\omega_S} = -(i_0 - 1) \quad (3)$$

表1 内歯車Cを固定した時の重ね合わせ法による角速度の求め方

	C	B	D	A	S
全体を同時回転	$\omega_S$	$\omega_S$	$\omega_S$	$\omega_S$	$\omega_S$
キャリア固定	$-\omega_S (= \omega_C')$	$-\omega_S \frac{z_C}{z_B}$	$-\omega_S \frac{z_C}{z_B}$	$-\omega_S \frac{z_C z_D}{z_A z_B} (= \omega_A')$	0
合計	0	$\omega_S \left(1 - \frac{z_C}{z_B}\right)$	$\omega_S \left(1 - \frac{z_C}{z_B}\right)$	$\omega_S \left(1 - \frac{z_C z_D}{z_A z_B}\right)$	$\omega_S$

この式(3)から歯車AはキャリアSと反対方向に回転することがわかる。そして歯面に作用する力によって生ずるトルクの方角と角速度の方角とが互いに同じになる基本軸を駆動側、互いに反対になる基本軸を従動側とする。従って遊星ピニオンBに作用する力の釣り合いから力と角速度との関係は一義的に図2に示す状態となる。いま力 $W_A$ 、 $W_C$ 、 $W_S$ によるO点(入出力中心)まわりのトルクを $M_A$ 、 $M_C$ 、 $M_S$ とすれば図2からトルクの釣り合い式として次式を得る。

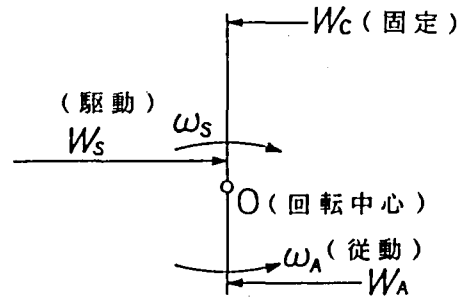


図2 遊星ピニオンに作用する力と角速度との関係

$$M_A - M_C + M_S = 0 \quad (4)$$

そしてこの遊星歯車機構の効率を $\eta$ とすれば次式で表される。

$$\eta = \frac{M_A}{M_S} \left| \frac{\omega_A}{\omega_S} \right| \quad (5)$$

次に表1において“合計”の欄に示される運動をしている機構全体に対して、キャリアの回転方向と反対方向の回転角速度( $-\omega_s$ )を与えてキャリアを固定した場合の運動が“キャリア固定”の欄に示してあり、これら“合計”の欄と“キャリア固定”の欄の運動とはいずれもA、B、C、D、Sの各要素にかかる力も各要素間の相対運動も変わりが無いからかみ合い損失には変化が無い。このことからこの遊星歯車機構の効率を求めることができる。すなわち表1の“キャリア固定”の欄における内歯車Cの角速度 $\omega_c' (= -\omega_s)$ は負方向、歯車Aの角速度は $\omega_A' \{ = -\omega_s z_c z_D / (z_A z_B) \}$ で負方向である。いまトルクの作用する方向と回転の方角とが互いに同方向のものを駆動側、互いに反対方向のものを従動側と考えると、この場合 $M_A$ は正方向、 $M_C$ は負方向であるから歯車Cが駆動側で歯車Aが従動側となり、キャリアSを固定したときの基準効率 $\eta_0$ は次式から求められる。

$$\eta_0 = \frac{M_A}{M_C} \left| \frac{\omega_A'}{\omega_c'} \right| = \frac{M_A}{M_C} i_0 \quad (6)$$

そして式(4)より $M_C = M_A + M_S$ を得るからこれを式(6)に代入して次式を得る。

$$\eta_0 = \frac{M_A}{M_A + M_S} i_0$$

これより次式を得る。

$$\frac{M_A}{M_S} = \frac{\eta_0}{i_0 - \eta_0} \quad (7)$$

そして式(3)と(7)とを式(5)に代入して次式を得る。

$$\eta = \frac{\eta_0(i_0 - 1)}{i_0 - \eta_0} \quad (8)$$

いま歯車BとCとのかみ合い効率を $\eta_1$ 、歯車AとDとのかみ合い効率を $\eta_2$ とすればキャリヤSを固定したときの効率(基準効率) $\eta_0$ は次式で表される。

$$\eta_0 = \eta_1 \eta_2 \quad (9)$$

次に各軸トルクを求める計算式として式(7)より次式を得る。

$$M_A = \frac{\eta_0}{i_0 - \eta_0} M_S \quad (10)$$

また式(4)から得られる $M_C = M_A + M_S$ に式(10)を代入して次式を得る。

$$M_C = \frac{i_0}{i_0 - \eta_0} M_S \quad (11)$$

次にキャリヤSを固定した時は、前述したごとくCが駆動側でAが従動側であるから、ピニオンBの軸にかかるトルクを $M_B$ とすると次式が成立する。

$$M_C |\omega_C'| \eta_1 = M_B |\omega_B'|$$

これより次式を得る。

$$M_B = \left| \frac{\omega_C'}{\omega_B'} \right| \eta_1 M_C = \frac{z_B}{z_C} \frac{i_0}{i_0 - \eta_0} \eta_1 M_S$$

そして式(2)から $i_0 = z_C z_D / (z_A z_B)$ であるからこれを代入して次式を得る。

$$M_B = \frac{z_D}{z_A} \frac{\eta_1}{i_0 - \eta_0} M_S \quad (12)$$

#### 【C駆動，S従動，A固定の場合】

表2は外歯車Aを固定し、内歯車Cを駆動しキャリヤSを従動させる場合の角速度を求めるための重ね合わせ法を示す。この表2より次式を得る。

表2 外歯車Aを固定した時の重ね合わせ法による角速度の求め方

	C	B	D	A	S
全体を同時回転	$\omega_s$	$\omega_s$	$\omega_s$	$\omega_s$	$\omega_s$
キャリヤ固定	$-\omega_s \frac{z_A z_B}{z_C z_D} (= \omega_C')$	$-\omega_s \frac{z_A}{z_D}$	$-\omega_s \frac{z_A}{z_D}$	$-\omega_s (= \omega_A')$	0
合計	$\omega_s \left(1 - \frac{z_A z_B}{z_C z_D}\right)$	$\omega_s \left(1 - \frac{z_A}{z_D}\right)$	$\omega_s \left(1 - \frac{z_A}{z_D}\right)$	0	$\omega_s$

$$\omega_c = \omega_s \left(1 - \frac{1}{i_0}\right) = \omega_s \frac{i_0 - 1}{i_0} \quad (13)$$

ただし  $i_0 (> 1)$  は式 (2) による。  
従って減速比  $u$  は次式から計算される。

$$u = \frac{\omega_s}{\omega_c} = \frac{i_0}{i_0 - 1} \quad (14)$$

この式(14)から歯車CはキャリアSと同方向に回転することがわかる。そして前述と同様に歯面に作用する力によって生ずるトルクの方向と角速度の方向とが互いに同じ

になる基本軸を駆動側, 互いに反対になる基本軸を従動側とする。従って遊星ピニオンBに作用する力の釣り合いから力と角速度との関係は一義的に図3に示す状態となる。そして図3からトルクの釣り合い式として次式を得る。

$$-M_A + M_C - M_S = 0 \quad (15)$$

そしてこの遊星歯車機構の効率を  $\eta$  とすれば次式で表される。

$$\eta = \frac{M_S}{M_C} \left| \frac{\omega_s}{\omega_c} \right| \quad (16)$$

次に表2の“キャリア固定”の欄における内歯車Cの角速度  $\omega_c' \{ = -\omega_s z_{AZB} / (z_C z_D) \}$  は負方向, 歯車Aの角速度は  $\omega_A' (= -\omega_s)$  で負方向である。いまトルクの作用する方向と回転の方向とが互いに同方向のものを駆動側, 互いに反対方向のものを従動側と考えると, この場合  $M_A$  は負方向,  $M_C$  は正方向であるから歯車Aが駆動側で歯車Cが従動側となり, キャリアSを固定したときの基準効率  $\eta_0$  は次式から求められる。

$$\eta_0 = \frac{M_C}{M_A} \left| \frac{\omega_c'}{\omega_A'} \right| = \frac{M_C}{M_A} \frac{1}{i_0} \quad (17)$$

そして式(15)より  $M_A = M_C - M_S$  を得るからこれを式(17)に代入して次式を得る。

$$\eta_0 = \frac{M_C}{M_C - M_S} \frac{1}{i_0}$$

これより次式を得る。

$$\frac{M_S}{M_C} = \frac{\eta_0 i_0 - 1}{\eta_0 i_0} \quad (18)$$

そして式(14)と(18)とを式(16)に代入して次式を得る。

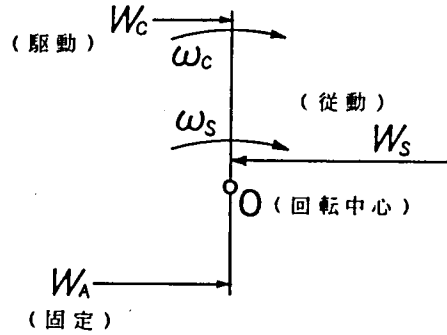


図3 遊星ピニオンに作用する力と角速度との関係

$$\eta = \frac{\eta_0 i_0 - 1}{\eta_0 (i_0 - 1)} \quad (19)$$

ただし  $\eta_0$  は式(9)より求められる。

次に各軸トルクを求める計算式として式(18)より次式を得る。

$$M_C = \frac{\eta_0 i_0}{\eta_0 i_0 - 1} M_S \quad (20)$$

また式(15)から得られる  $M_A = M_C - M_S$  に式(20)を代入して次式を得る。

$$M_A = \frac{1}{\eta_0 i_0 - 1} M_S \quad (21)$$

次にキャリアSを固定した時は、前述したごとくAが駆動側でCが従動側であるから、ピニオンBの軸にかかるトルクを  $M_B$  とすると次式が成立する。

$$M_A | \omega_A' | \eta_2 = M_B | \omega_B' |$$

これより次式を得る。

$$M_B = \left| \frac{\omega_A'}{\omega_B'} \right| \eta_2 M_A = \frac{z_D}{z_A} \frac{\eta_2}{\eta_0 i_0 - 1} M_S \quad (22)$$

同様な方法により、Aを固定しSを駆動してCを従動させる場合、Sを固定しCを駆動してAを従動させる場合、Cを固定しAを駆動してSを従動させる場合、Sを固定しAを駆動してCを従動させる場合について、速比、効率および軸トルクの理論計算式を導き、これらを一覧表にして表3に示す。なお  $\eta_0 = 1$  ( $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ) と仮定した場合についても表中に示した。

### 3. 結 言

内歯車とそれにかみ合う外歯車との歯数差を1または2のように小さく設定することにより一段で大幅に減速することができ、しかも小型軽量の機構とすることができるハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構について解析し、この機構の速比、効率および軸トルクの理論計算式を導いた。そして読書がその利用に際し適用を誤るおそれの無い便利な一覧表を作成した。

### 参 考 文 献

- (1) 両角宗晴：遊星歯車機構の効率評価の簡単な分かりよい方法について、信州大学工学部紀要、31, (1971), 105.
- (2) 両角宗晴：遊星歯車と差動歯車の理論と設計計算法、日刊工業新聞社(1989), 103.

表3 ハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構の速比, 効率および軸トルクの理論計算式

	駆動	従動	固定	速比 $u$	効率 $\eta$	軸トルク			
						$M_A$	$M_C$	$M_S$	$M_B$
$\eta_0 \neq 1$	S	A	C	$\frac{\omega_A}{\omega_S} = -(i_0 - 1)$	$\frac{\eta_0(i_0 - 1)}{i_0 - \eta_0}$	$\frac{\eta_0}{i_0 - \eta_0} M_S$	$\frac{i_0}{i_0 - \eta_0} M_S$	$M_S$	$\frac{z_D}{z_A} \frac{\eta_1}{i_0 - \eta_0} M_S$
	逆方向減速								
	S	C	A	$\frac{\omega_C}{\omega_S} = \frac{(i_0 - 1)}{i_0}$	$\frac{i_0 - 1}{i_0 - \eta_0}$				
	同方向減速								
	C	A	S	$\frac{\omega_A}{\omega_C} = i_0$	$\eta_0$				
	同方向増速								
	A	S	C	$\frac{\omega_S}{\omega_A} = -\frac{1}{(i_0 - 1)}$	$\frac{\eta_0 i_0 - 1}{i_0 - 1}$				
	逆方向増速								
C	S	A	$\frac{\omega_S}{\omega_C} = \frac{i_0}{(i_0 - 1)}$	$\frac{\eta_0 i_0 - 1}{\eta_0 (i_0 - 1)}$					
同方向増速									
A	C	S	$\frac{\omega_C}{\omega_A} = \frac{1}{i_0}$	$\eta_0$					
同方向減速									
$\eta_0 = 1$					1	$\frac{1}{i_0 - 1} M_S$	$\frac{i_0}{i_0 - 1} M_S$	$M_S$	$\frac{z_D}{z_A} \frac{1}{i_0 - 1} M_S$

ハイポサイクロイド型2K-H遊星歯車機構の効率と軸トルク計算式