

# 薄肉箱形断面柱の相関座屈実験 及び固有値計算法の比較

永藤 壽宮\*・小林 清\*\*

## Interaction Buckling Experiment of Box Columns and Comparison between Various Calculations of Eigen-value

Toshimiya NAGATO, Kiyoshi KOBAYASHI

Box sections present very interesting properties in the field of compressed elements. The purpose of this experiments is to supply experimental data of interaction buckling (overall and local bucking).

Support conditions are pin-ended type by using new developed bowl shoe.

You can see the comparison between various calculations of eigen-value problem.

### 1. ま え が き

近年、構造解析において、電子計算機の発達に伴い、橋梁本体及び、各部材力学的合理化断面が、多く用いられ、薄肉軽量化が進められている。しかしながら1969年11月におきた第4 Danube 橋の落橋事故から始まり次々の事故に会い、その中で圧縮板の耐荷力特性について指摘された。近年において耐荷力における大きなファクターである初期不整等を考慮した部局座屈問題や、全体座屈問題については、多く研究がなされたが、特に局部と全体座屈の相関性については、余り取り扱われておらず、最近では、名古屋大学と大阪市立大学で、その分野について進められているだけである。わが国の道路橋示方書も、その相関性について若干の改正が、なされたが、理論的根拠は、明白ではない。従って本研究は、相関座屈の耐荷力に対しての影響を3つのタイプつまり(1)局部座屈が、先行し、全体座屈を生じるもの(2)局部座屈と全体座屈の同時発生(3)全体座屈が先行し、局部座屈を誘発させるもの3種に分類しそれぞれ試供体を作製し、圧縮耐荷力実験を行い、極限強度と連成強度について考察した結果を報告し、理論適用の材料とする。また実験の際の両端ピン支承という条件に対し著者が開発した2軸方向回転可能な経済的な球面支承を使用した。

### 2. 供試体の選定

鋼種は、SS41とし箱形断面についての局部材料強度は、小松等による圧縮板の耐荷力曲

\* 土木工学科 助教授

\*\* 文部技官

原稿受付 平成2年6月30日

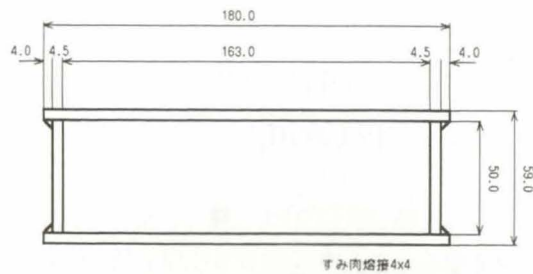


図1 断面諸元

線，全体座屈は，E. C. C. S の複数柱強度曲線を用いて，両座屈強度が，等しくなるという点及び，耐圧試験機の能力100 t，ヘッドクリアランス1.5mの制約条件を満たす様に，基本供試体の断面構成及び長さ等を決定した，更に基本供試体と同一断面で長さを適宜に変化させて短柱供試体Aから始めて，Hまで約8種類の供試体を作製した．支持条件は，上述の通り，両端ピン支承で，弱軸，強軸とも回転可能な球面ピン支承を設計荷重100 tとして設計及

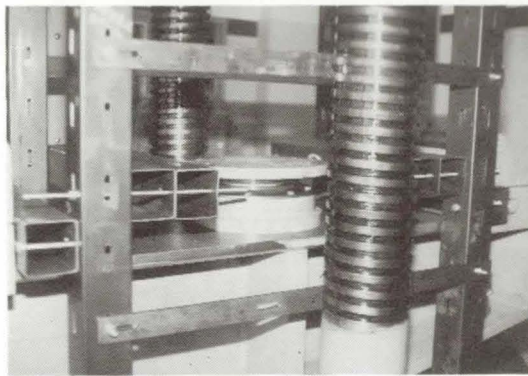


写真1 ピン支承

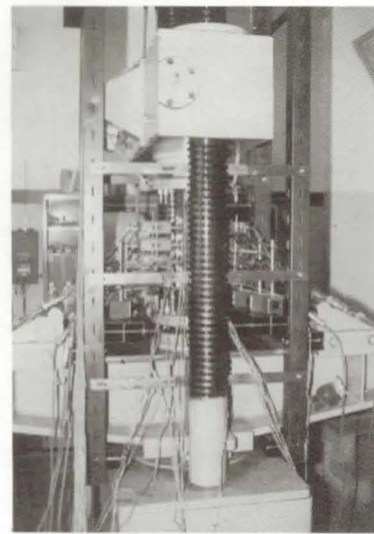


写真2 実験状況

び作製した．箱形断面諸元を図1に示す．上部，下部支承を写真1に示す．

実験用供試体（短柱）を球面ピン支承に取付け，変位計等を設置した圧縮耐荷力試験状況を写真2に示す．

### 3. 材料実験

引張試験片は，圧縮実験用供試体と同一鋼材から切り出した JIS 5号片を用いた．その結

表1 材料試験結果

$\sigma_{yu}$	$\sigma_{y1}$	$\sigma_t$	E	$\nu$	$\delta$
2703	2593	3921	2.08	0.274	31.6

果は、表 1 に示す通りである。それぞれの値は、4 本ずつ試験を行った平均値である。

#### 4. 残留応力度測定

残留応力度は、試験用短柱供試体で、切断法により、測定した。それぞれ溶接後に、鋼球を打ち込み、切断した後、鋼球の距離をコンタクトゲージ (1/1,000mm) で測定し、算出したものである。切断後の供試体を写真 4 に、また、その結果を図 2 に示す。

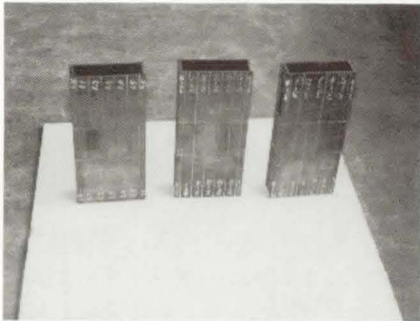


写真 3 残留応力度供試体

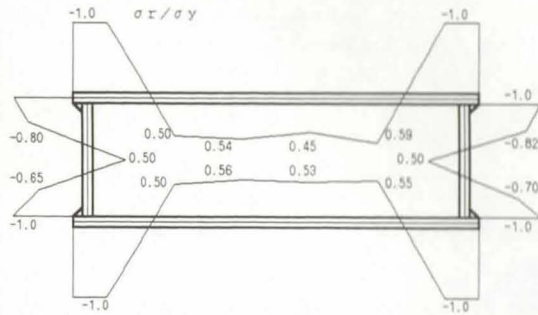


図 2 残留応力度分布図

#### 5. 初期たわみ測定

初期たわみ測定は、測定用ジグを開発し、柱の初期たわみ (弱軸, 強軸方向) 及び、板の初期たわみをそれぞれ変位計 (1/100mm) を用いて測定された。その結果を表 2 に示す。また供試体 H の柱の初期たわみを図 3 に、板の初期たわみを図 4 に 1 例として示す。

表 2 供試体の初期たわみ

Span (mm)	W pmax (板 A 面)	W pmax (板 B 面)	W cmax (弱軸方向)	Span	W pmax	W pmax	W cmax
A(300mm)	—	—	—	E(700mm)	1.7(1/96)	1.3(1/125)	0.2(1/3500)
B(400mm)	2.3(1/71)	1.4(1/116)	0.5(1/800)	F(800mm)	2.2(1/74)	2.0(1/82)	0.3(1/2666)
C(500mm)	2.0(1/82)	2.3(1/71)	0.4(1/1250)	G(900mm)	3.2(1/51)	4.2(1/39)	0.3(1/3000)
D(600mm)	1.8(1/91)	2.1(1/78)	0.3(1/2000)	H(1000mm)	3.5(1/47)	3.2(1/51)	0.8(1/1250)

$$W_{max} = .8$$



図 3 柱初期たわみ分布図 (供試体 H)

$$W_{max} = 3.2$$

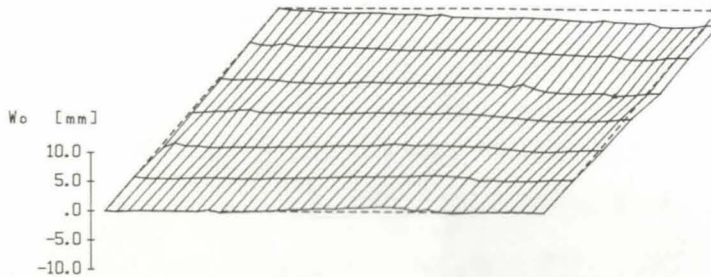


図4 板初期たわみ分布図 (供試体 H)

## 6. 本 実 験

荷重偏心が、発生しない様、推定極限強度の1/3程度の荷重レベルにおいて、調整用ゲージにより、それぞれの値が、それらの平均値の5%以内に収まるように、スペーサーで調整した。局部座屈が、発生する箇所を変位計で、ある程度予測し、その部分に変位計等を集中させ局部座屈性状を観察した。

## 7. 実験結果及び考察

供試体Hは局部座屈と全体座屈の連成座屈を生じて崩壊し、供試体Dから供試体Gまでは局部座屈優先の全体座屈崩壊すなわち局部座屈による局部変形により全体座屈を誘発して崩壊に至った。供試体Aから供試体Cは短柱の局部座屈を生じて崩壊した。それぞれの破壊後の供試体を写真4、5に示す。

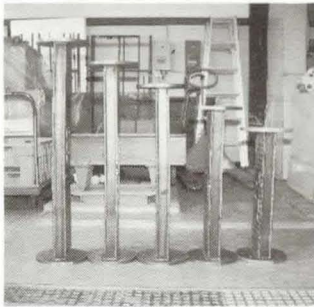


写真4 座屈後供試体

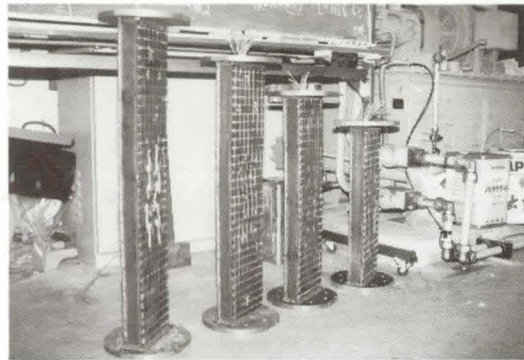


写真5 座屈後供試体

本紙では、局部座屈と全体座屈の連成座屈を生じた供試体Hについて考察していく。第4節の残留応力の図2を見ると各断面内にそれぞれ残留応力の平均を取るとほぼ降伏応力に対し0.4~0.5位生じている事がわかる。また第5節の初期たわみの図3、4で明らかのように供試体作製時の溶接順序により板及び柱にそれぞれ正弦波がオーダー的には少ないが生じている事がわかる。(供試体Bについては柱の初期たわみが非常に大きいので耐荷力をかなり低下する事がわかる) 残留応力にしる初期たわみにしても内側にゲージを貼るために溝形で

最初成形し、ひずみゲージを貼った後蓋を熔接した結果として生じたものである。

まず荷重—ひずみ曲線について報告していく。

図5は、蓋側のそのゲージが貼ってある部分が凹部に徐々に曲げを生じ $P/P_y=0.75$ に至って大きな曲げ変形、すなわち局部座屈を生じたと観察される。図6は図5の点の近傍にある為 $P/P_y=0.75$ 以降図5の点の曲げ変形に引きずられ同様に変形したものと観察される。

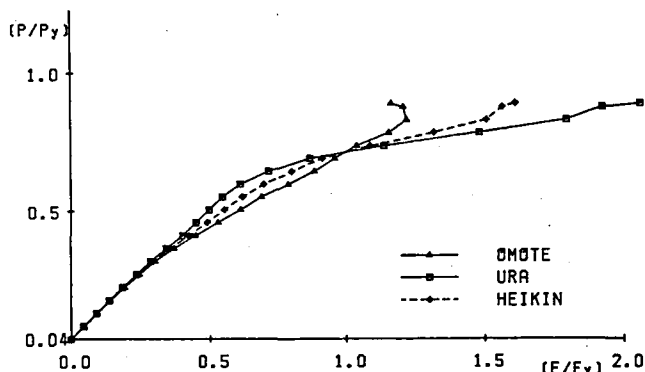


図5 荷重—ひずみ曲線 (供試体 H 蓋側)

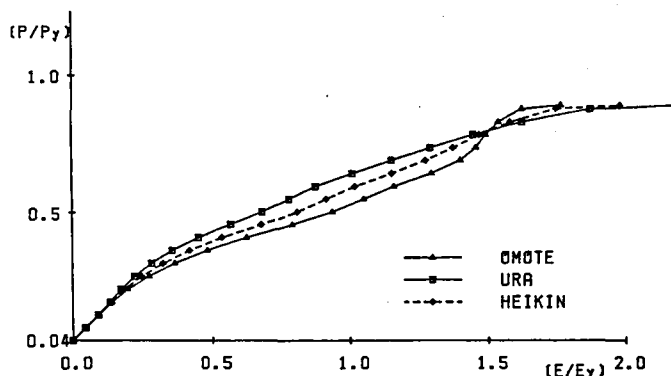


図6 荷重—ひずみ曲線 (供試体 H 蓋側)

図7は蓋側のそれらの点のゲージが貼ってある部分の溝側にある点の荷重—ひずみ曲線であるが $P/P_y=0.75$ 付近で除荷現象を表、裏のゲージとも共に起こしている事から、その部分は、 $P/P_y=0.75$ 付近で全体変形によって凸部の部分となったからであると予想される。その傾向は、溝側全体のゲージの荷重—ひずみ曲線に共通した除荷現象である。

すなわち図5の点が $P/P_y=0.75$ 付近で局部座屈を生じると同時に溝側全体が $P/P_y=0.75$ 以降、引張になっていることから、全体変形を起こす全体座屈を生じさせている事が推察される。したがって局部座屈と全体座屈の連成座屈現象が生じていると思われる。

一方、図8は荷重—板変位曲線であるが、図5の点すなわち局部座屈を起こした場所に設置されていた変位計で測定された。この図からも $P/P_y=0.75$ 付近で大きな板の変位の増大を示していることから、局部座屈発生を照査しているものと考えられる。

次に図9は、荷重—柱たわみ曲線であるが荷重による柱のたわみを変位計を使用して測定

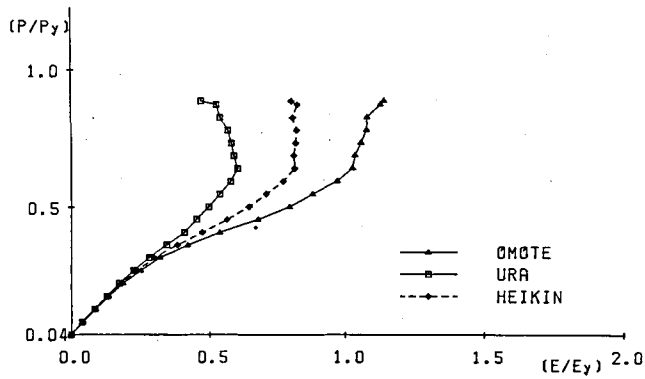


図7 荷重—ひずみ曲線 (供試体 H 溝側)

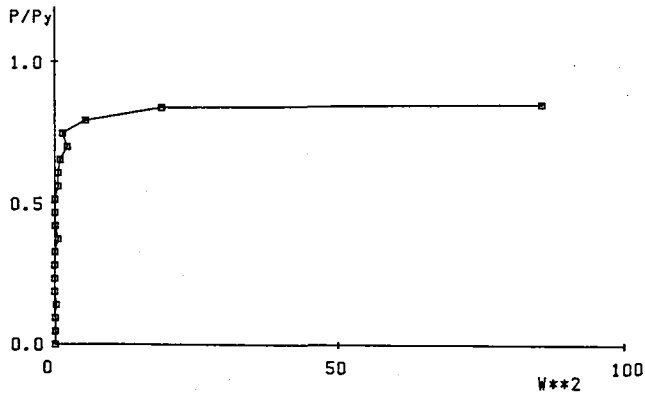


図8 荷重—板変位曲線 (供試体 A 蓋側)

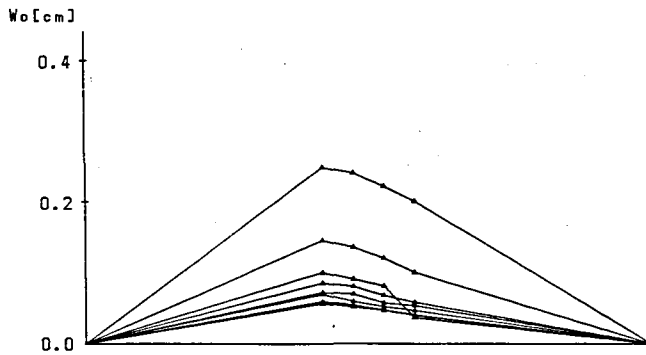


図9 荷重—柱たわみ曲線

されたものである。

前と同様に終局段階の一手前すなわち  $P/P_y = 0.75$  で 3 次モードの全体座屈を生じている事が観察される。

供試体 D～G は、同様に観察すると屈部座屈優先の崩壊 (局部変形が生じてから全体変形

が生じている)であった。

供試体A～Cはスパン長が短くて短柱供試体としてみなされて主に柱としての耐荷力ではなく板としての局部座屈強度が測定された。

今回の連成座屈実験についての理論的解法の際に筆者達は、残留応力を考慮し有限帯板法を用いた。その時使用する固有値計算法の比較を種々に行った。

後の章で詳しくはのべるが使用して比較の結果は、ハウスホルダー-QR法が計算時間及びプログラムの量といい最優秀であった。

その理論を使用して導かれた座屈値は、理論値とはほぼ一致しているが、初期たわみの項を考慮できないという欠点をもっているので現在新たにそれを考慮した形で開発中である。

図10～11の残留たわみ図から正弦の全体座屈波形を全体的に示し中央部に局部座屈波形性

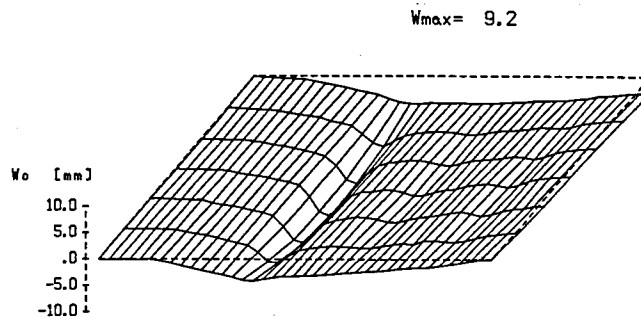


図10 残留たわみ図 (供試体 H 蓋側)

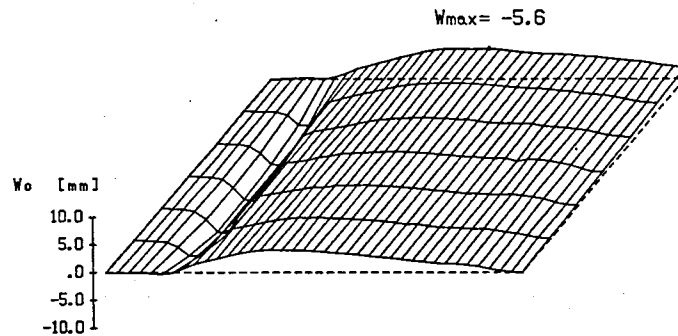


図11 残留たわみ図 (供試体 H 溝側)

表3 座屈強度比較表

供試体	座屈荷重 (t)	座屈性状	供試体	座屈荷重 (t)	座屈性状
A (30cm)	54.0	局部座屈	E (70cm)	54.8	局部から全体座屈を誘発
B (40cm)	50.8	局部座屈	F (80cm)	55.5	局部から全体座屈を誘発
C (50cm)	52.5	局部座屈	G (90cm)	49.6	局部から全体座屈を誘発
D (60cm)	51.0	局部から全体座屈を誘発	H (100cm)	48.2	局部と全体の連成座屈

状を示していることがわかる。

表3には供試体A～Hのそれぞれの供試体の最終強度比較とそれぞれの座屈性状の比較を示す。供試体A～Hの長手方向の長さは、表2に準じる。

### 8. 過去のデーターとの比較

過去数年の相関座屈実験についてまとめると、図12～図14の断面諸元別に(A)～(C)として分類して、初期たわみ、残留応力及び柱の細長比と板の幅厚比でまとめ、連成座屈荷重と連成なしの座屈荷重の比較を表4に示す。

全体座屈と局部座屈の連成座屈強度は、非連成座屈強度に対して一般的に座屈強度の低下をもたらしている。またその低下の割合は、柱の細長比の増大と板の幅厚比の増大とともに大きくなっている事が観察される。

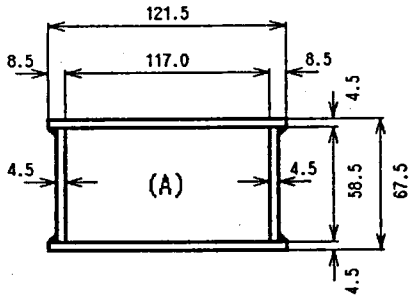


図12 供試体(A)

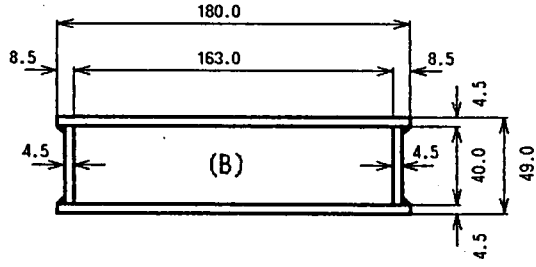


図13 供試体(B)

図12～図15 過去数年間の実験断面諸元

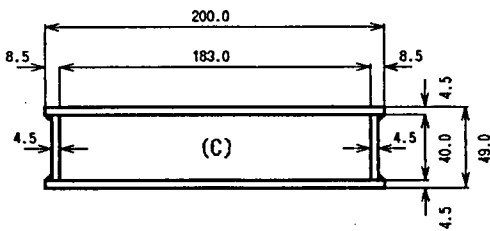


図14 供試体(C)

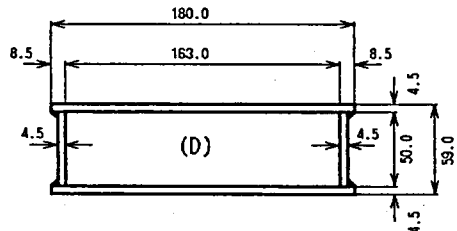


図15 供試体(D)

表4 連成座屈強度比較表 (過去数年間)

MODEL	柱初期たわみ ( $\delta/l$ )	板初期たわみ ( $\delta/b$ )	残留応力 ( $\sigma_r/\sigma_y$ )	柱細長比 ( $l/r$ )	板幅厚比 ( $b/t$ )	実験値 連成(無連成)
(A)	1/1000	1/61	0.46	19.7	26.0	46.6(48.9)
(B)	1/950	1/70	0.40	38.5	36.2	42.5(46.5)
(C)	1/970	1/47	0.46	65.9	40.7	45.0(53.8)
(D)	1/1250	1/47	0.49	48.2	36.2	48.2(52.6)



### 9. 各種固有値計算法の比較

土木における一般固有値問題は、広く座屈及び振動問題で使用されている。一般的に計算される行列の次数が大きくなるにつれ演算時間が膨大な量となる。本研究は、固有値問題において下記の2点にわたって研究がなされた。

- (1) 一般固有値問題  $[K]\{\phi\}=P[G]\{\phi\}$  から標準固有値問題  $[M]\{\psi\}=\{\psi\}$  への変換
- (2) 座屈問題の有限帯板法の計算例を通し、一般固有問題としての各種計算法（ハウスホルダーQR法、ハウスホルダーギブンス法、ヤコビー法、累積法、ハウスホルダーQL法）の演算時間の比較一般固有値問題から標準固有値問題への変換

まず一般固有値問題から標準固有値問題への変換を行う。普通の座屈問題においては、剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスを合計して、全体の剛性マトリックスを作り、境界条件を与えた後は、一般固有値問題となる。一般固有値問題は、以下の様にコレスキー分解を適用して、標準固有値問題への変換をはかり計算された。

$$[K]\{\phi\}=P[G]\{\phi\}$$

上式を解くには、コレスキー分解により[L]を下三角形マトリックスとすると

$$[G]=[L][L]^T \text{ として、また } \{\phi\}=[L]^{-1}\{\psi\} \text{ とおいて}$$

$$[K]=[L]^{-1}\{\psi\}=P[L]\{\psi\} \text{ となる。両辺}$$

に  $[L]^{-1}$  をかけると

$$[L]^{-1}[K][L]^{-1}\{\psi\}=P[L]^{-1}[L]\{\psi\} \\ =P\{\psi\} \text{ となる。}$$

ここで  $[M]=[L]^{-1}[K][L]^{-1}$  とすると

$$[L]^{-1}[K][L]^{-1}\{\psi\}=P[L]^{-1}[L]\{\psi\} \\ =P\{\psi\} \text{ となる。}$$

ここで  $[M]=[L]^{-1}[K][L]^{-1}$  とすると

$[M]\{\psi\}=P\{\psi\}$  となり、この順序で固有値サブルーチンを作成し一般固有値問題から標準固有値問題への変換がなされる。

上述をふまえて図17の様なフローチャートで計算された。その際の残留応力分布は図16で示した様に仮定された。その時のモデルは、図15の供試

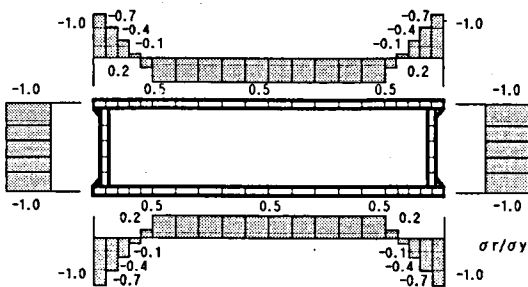


図16 仮定残留応力分布形状

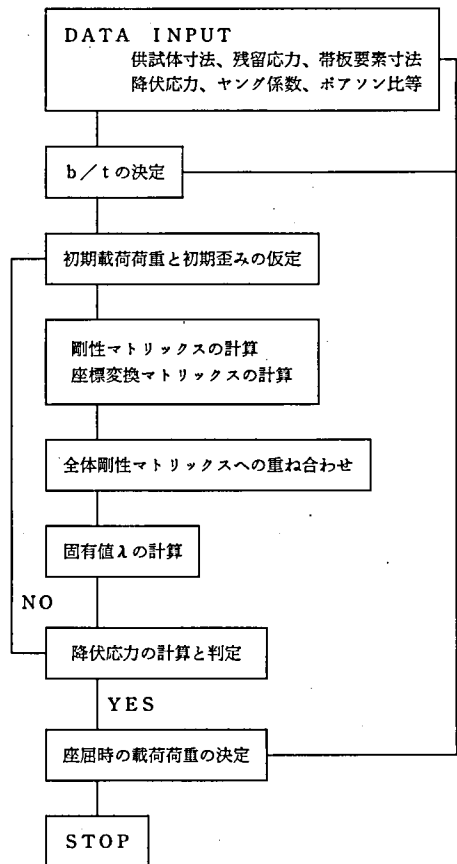


図17 フローチャート

体(D)を用いた。

この場合注意する事は、あくまで固有値1個を計算するのに必要なランタイムの比較である。座屈値を求める際の収束への反復数は考慮されておらない。

また仮定された残留応力度分布は、部材長方形断面の長辺部分の分布であり短辺部は、それより粗い分布形状を仮定した。

次に比較された各種固有値計算法の概要を以下に示す。

#### ハウスホルダー・ギブンス法

実対称行列Aをハウスホルダーの発見した三項対角法により三項対角行列Cに変換し、二分割法により、三項対称角行列の固有値を求める方法。

#### ヤコビ法

実対称行列Aを、直交行列Vを用い $V^T AV = D$ を対角化することにより、固有値と固有ベクトルを同時に求めることができる方法である。

任意に選ばれた基本直交変換を繰り返すことにより、対角行列Dを導くことができ、対角行列のD対角要素が、固有値として求められる。

#### 累積法

すべての固有値を求める必要がない場合に有効であり、絶対値が最大の固有値と固有ベクトルから順次、それぞれの値が求められる方法

$$A^s u_0 = \sum \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i \text{ で固有値 } \lambda_i, \text{ 固有ベクトル } \varepsilon_i \text{ が求められる。}$$

#### ハウスホルダー QL 法

QR法を変形したもので、一般に、絶対値の小さな順に(1, 1)要素から並ぶ様になる。

#### ハウスホルダー QR 法

実対称行列Aを、ユニタリ行列Qと上三角行列Rの積に分解し $A^{(s)} = Q^{(s)} R^{(s)}$

次に $A^{(s+1)} = R^{(s+1)} Q^{(s+1)}$ から $A^{(s+1)}$ を求める以上2式の繰り返しにより得られる行列 $A^{(s+1)}$ は、上三角行列に収束しその対角要素を固有値として求める方法である。一般に、絶対値の大きな順に(1, 1)要素から並ぶようになる。

表5にそれぞれの結果についてもとめた。

表からハウスホルダー QR法が座屈固有値計算において優秀である事が、観察された。

表5 演算時間比較表

各種固有値計算法	CPU RUN TIME	FILE LINES
ハウスホルダーギブンス法	3'45.08"	884
ヤコビ法	183'30.24"	719
累積法	14'25.41"	862
ハウスホルダー QL 法	8'24.32"	802
ハウスホルダー QR 法	1'15.02"	732

## 10. 結 論

- (1) 全体座屈と局部座屈との連成座屈問題の理論適用データーを提出した。
- (2) 裏側にゲージを貼る為に最初に溝形で供試体を作り、その後で蓋をするという方法を採用した為に残留応力が比較的大きい。
- (3) 本研究室で開発した全方向回転可能ピン支承は、有効的に稼働した。
- (4) 局部座屈は、供試体の長手方向に幾つか発生するが、多くは中央部分に2～3波のフランジ幅の波長をもって生じる。
- (5) 局部座屈発生直ちに全体座屈につながらず、5～11%の後局部座屈強度を有しており、またその傾向は幅厚比の大きい供試体ほど顕著に観察された。
- (6) 柱の細長比及び板の幅厚比が大きくなるほど、連成座屈の影響が大きくなり極限強度の低下をもたらす。
- (7) 座屈固有値計算において、ハウスホルダーQR法の優秀性を確認した。

## 参 考 文 献

- 1) 小松定夫, 北田俊行: 初期不整を有する圧縮板の極限強度特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第270号 昭和53年2月 P1~P14
- 2) 永藤壽宮: 各種固有値計算法の演算時間の優劣について, 長野工業高等専門学校電子計算機センター年報 第4号 平成2年3月 P17~P20