

振り子の運動の自動測定例*

宮坂忠昭**・春原真一***

Applied Measurements of Pendulum Motion*

Tadaaki MIYASAKA** and Shinichi SUNOHARA***

The single pendulums are appeared as teaching materials in many physics textbooks. They are used because their motion is simple and is obtained from simple experiment devices. But the significance of physics includes many facts. That treatments on studying physics are not well-balanced in theory, for it is difficult to measure experimentally the pendulums' motion.

From the point of view, it is necessary for us to measure precisely the motion of the single pendulum for the explanation of the energy conservation.

This paper refers to a new method that is used to measure both the vartical and horizontal motion of the single pendulum. We can use "Digitaizer" which is offered for introducing the figure information to computer.

1. 緒 言

応用物理教育において、単振り子運動は簡単な装置で実験可能で、かつその内容は多様性をもつため、力学的分野のみならず他の分野の対応例まで利用される。その運動を拡張して平面的あるいは垂直的にとらえるかによって、前者は円錐振り子の運動解析、後者は単振り子の力学的エネルギー保存の法則、ばね振り子の運動等に教材として利用されている。

これらの内容は、ほとんどが理論的取扱いにとどまっているのが現状である。それは実験によって定量的に扱おうとすれば、周期 T の測定はともかく、これら運動の特徴とも言える軌跡の時間的変化の複雑さを定量的に測定するのは、ほとんど不可能に等しかったためである。例えばバネ振り子の運動では、瞬間速度の測定が困難なため運動エネルギーが、また静止座標が正確に測定されないと位置エネルギーがいずれも決定されず、力学的エネルギー保存の法則の実験的取扱いは不可能で、その発表例は少なかった。

これら理論的取扱いの教材を具体的かつ実験的な教材に変えるために、マイコンと図形処理装置に工夫を加えることで振り子運動の簡単な自動測定を試み、更に応用物理教育に利用した¹⁾。この方法は(1)市販されている装置を用う。(2)規模はできる限り小さくする。(3)低い価格の3点を満足する。

* 1989年3月春季・第36回応用物理学関係連合講演会にて発表

** 基礎専門 応用物理 教授

*** 一般科 物理教室 技官

原稿受付 平成2年6月30日

本報は検出器の位置を変えることによって、運動の測定が平面的に加えて、垂直的に可能になったので測定例を報告する。

2. 実験方法

2・1 理論と測定内容

単振り子の平面運動で、X-Y方向の復元力が作用した場合の楕円振動に関しては前報⁽¹⁾に譲り、図1に示すような弾性係数 k のばねにつり下げられた質量 m の物体の運動は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

この微分方程式の解は次式で示される。

$$x = A_0 \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (2)$$

ここで

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

であり、 A_0 、 α_0 は初期条件で決定される。

次にこの振り子の位置エネルギーと運動エネルギーは次式で示される。

$$U = \frac{1}{2} kx^2, K = \frac{1}{2} mv^2$$

応用物理の教材としては、 $U+K=一定$ として取扱うが、本実験では位置(x)と速度(v)とがかなり接近して測定可能であるから、最大振幅を X 、中立点での速度を V とすれば次式より X と V とは比例し、この関係を実験値より計算で確かめればよい。

$$\frac{1}{2} kX^2 = \frac{1}{2} mV^2 \quad \therefore X = \sqrt{\frac{m}{k}} V \quad (4)$$

2・2 実験装置

詳細は先報⁽¹⁾に譲り概略を記す。マイコンはソフトが他メーカーの機種と共通で利用可能の利点をもつMSX機⁽²⁾を用いた。小型でかつ安価で、スロットが複数用意され常時多種類のインターフェイスが簡単に使用できその応用範囲が広い⁽³⁾。

運動の軌跡をマイコンに取り込むのに、図形処理装置(マイタレット-II)⁽⁴⁾を用い、その

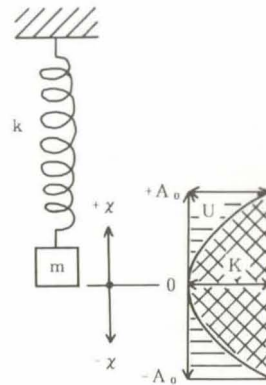


図1 ばね振り子のエネルギー関係

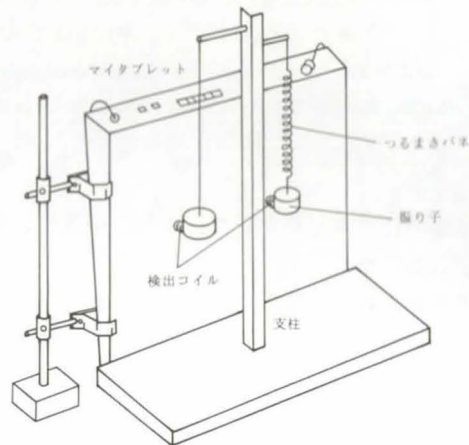


図2 測定装置

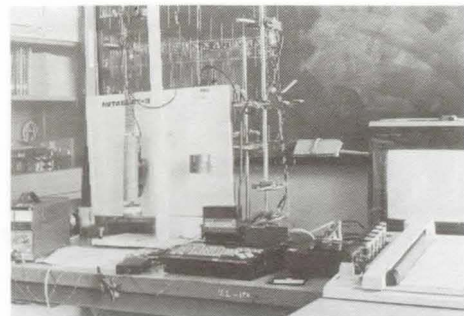


図3 振り子運動の自動測定装置

カーソル部を検出子として振り子に取りつけることにより、ある時間間隔であるが測定精度0.1mmで座標 (x_i, y_i) が測定可能になった。読み取り有効面積（振り子運動範囲）は380mm×260mm、測定時間間隔は最高で約10msである。測定された座標値はRS-232Cのカートリッジを介してマイコンに取り込むとともに、マイコン内の時刻と合せて処理し、運動の軌跡はXYプロッタに描画し、TVに表示させる。数処理された結果はプリンタで打ち出し、その保存をフロッピにする。

検出子は装置付属のカーソル部をそのまま使用してもよいが、質量、形状ともに大きく、振り子に取付けた場合その影響が大きいので自作した。検出子は中空のコイルからなっており各種のコイルを試作し測定した結果、0.5mmφのエナメル線を直径32mmの紙製ポビンに320T巻いたのを用いた。

実験装置の全体図を図2にその実際を図3に示す。図形処理装置を垂直に立てて、単振り子の運動とバネ振り子の運動を測定している。手前にMSXコンピュータとそれに挿入されたRS-232Cとクイックディスクのカートリッジが見える。垂直面内の振り子の運動測定用の検出コイルを図4に示す。装置のブロック図を図5に示す。スロットは3つあるが、この場合1つ不足でフロッピディスクとクイックディスクは測定目的によって、選択使用する。

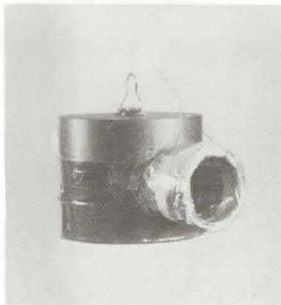


図4 検出子

2・3 測定用プログラム

自動測定させるプログラムは、高速性を優先させるためにはマシン語が適するが、汎用性と簡便性からBASICを用いた。これは他の目的（例えばフーコー振り子の自動測定等）に応用可能とした。代表例として、バネ振り子の運動の自動測定プログラムは次の順序によった。

- (1) 振り子の質量 m 、長さ l を測定した後、マイコンと図形処理装置への初期条件を送出、ファイルを開く。
- (2) 図形処理装置で振り子の位置を測定して $X(I)$ 、 $Y(I)$ 座標

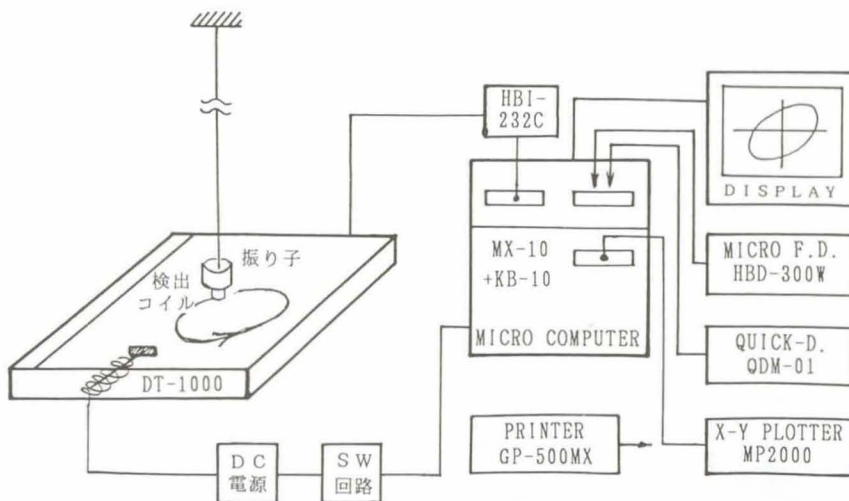


図5 振り子の運動の自動測定装置回路図

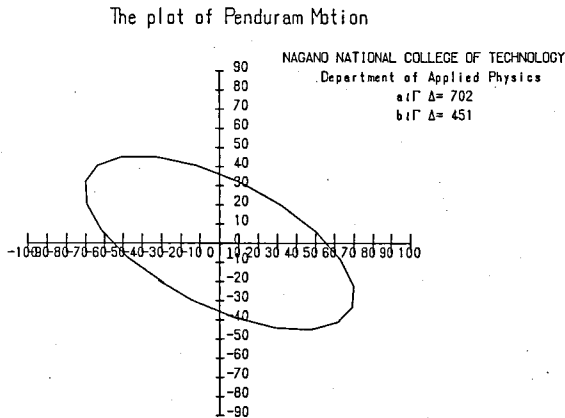


図6 楕円振動の測定例

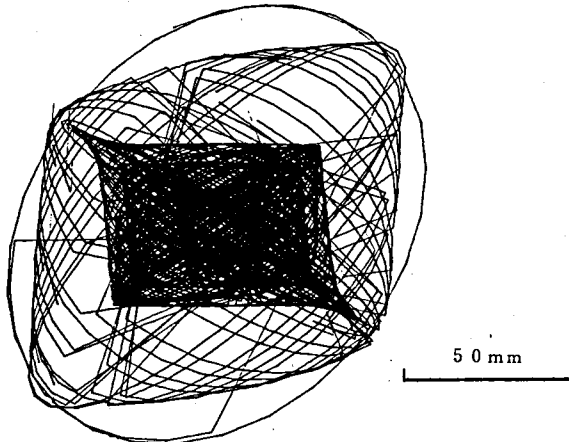


図7 楕円振動の時間的変化の測定例

表1 楕円振動の測定値例

X=1931 Y=1492 I=1	A(I)=X-1736(I)=1621= 1
X=1783 Y=1689 I=2	A(I)=X-1788(I)=1141= 2
X=1610 Y=1851 I=3	A(I)=X-1648(I)= 551= 3
X=1432 Y=1965 I=4	A(I)=X-1358(I)=-151= 4
X=1268 Y=2020 I=5	A(I)=-908(I)=-771= 5
X=1132 Y=2005 I=6	A(I)=-398(I)=X-1351= 6
X=1042 Y=1928 I=7	A(I)= 178(I)=X-1201= 7
X=1003 Y=1799 I=8	A(I)= 718(I)=X-2021= 8
X=1020 Y=1613 I=9	A(I)=1198(I)=X-2081= 9
X=1091 Y=1411 I=X10	A(I)=1568(I)=X-1951=10
X=1210 Y=1203 I=X11	A(I)=1768(I)=X-1531=11
X=1366 Y=1008 I=X12	A(I)=1758(I)=X-1041=12
X=1542 Y= 855 I=X13	A(I)=1608(I)=-441=13
X=1717 Y= 751 I=X14	A(I)=1278(I)= 271=14
X=1877 Y= 707 I=X15	A(I)= 638(I)= 901=15
X=2004 Y= 734 I=X16	A(I)= 278(I)=1421=16
X=2087 Y= 824 I=X17	A(I)=-298(I)=1871=17
X=2114 Y= 966 I=X18	A(I)=-828(I)=2671=18
X=2085 Y=1153 I=X19	A(I)=X-1288(I)=2041=19
X=2003 Y=1360 I=X20	A(I)=X-1606(I)=1881=20
X=1875 Y=1564 I=X21	A(I)=X-1748(I)=1471=21
X=1715 Y=1752 I=X22	A(I)=X-1748(I)= 911=22

としてマイコンに取り込む。

- (3) 運動の周期 T に合うよう測定をくりかえし、前後の差を計算しながら、読み取り誤差を検出し、あれば測定をやり直す。
- (4) マイコン内のクロック値を用いて、位置のエネルギー U と運動エネルギー K を計算してゆく。
- (5) 運動の軌跡をXYプロッタで表示し、更に位置のエネルギー、運動のエネルギー、周期、振幅を表わす。
- (6) 測定結果の数値は、プリンタで記録し、更にフロッピに保存する。
- (7) ファイルを閉じる。

3. 測定結果

3・1 楕円振動(水平面内測定)

先の研究にも一例を報告したが、 x, y 方向の双方の振動を合成した結果である。質量 $m=1.25\text{kg}$ 、の円筒状振り子を長さ $l=1.866\text{m}$ 、太さ $d=0.3\text{mm}$ のピアノ線で吊った場合の測定結果を図6に示す。1周期運動を数処理後直ちにその軌跡をXYプロッタで描いた。また測定数値例は表1に示す。周期 T は $T=2\pi\sqrt{l/g}$ で示され測定結果は $T=2.76(\text{s})$ であった。本校に近い長野市松代の重力の加速度の値を採用して⁽⁶⁾、 $g=9.7976$ を代入すると理論値 $T=2.74$ が得られ、ほぼ実験誤差内で一致している。周期内で約24回の読み取りが行なわれているので時間間隔は約125(ms)要し、これはRS-232Cの読み取り速度と比較してかなり遅い。理由はマイコン内での計算を行なった後に読み取りしたためである。運動に追従した軌跡表示を重視したもので、数値のみ

読み取り，その後計算と表示をさせるようソフトを改めればよい。

3・2 楕円振動の時間的变化

3・1と同じ振り子の運動に，任意のXY方向に僅かな弾性係数をもつばね（実際には0.3mmの検出コイルからの信号取出し用エナメル線）を入れた場合，振り子の軌跡の連続変化を図7に示す。約1時間20分にわたる振動の変化を10数分間隔をおいて数10回周期を重ねてXYプロッタに描かせた。連続の描画であると全てが塗りつぶされて，その変化が捉えられないためである。この結果の詳細は検討中であるが，微小バネの弾性係数測定との関連として興味深いものがある。この図7から容易に振幅 a ， b ，位相差の変化の様子，が説明可能になり楕円振動の具体的な教材として有用である。なお図で外側の大きな振幅における不規則な直線状の軌跡は測定器の読み取り不能の結果である。

3・3 ばねによる振り子の運動 (垂直面内振動)

弾性係数 k のばねに吊り下げられた質量 m の単振り子運動は，図形処理装置を図2に示すように垂直に置きX方向の変位を垂直方向にすることによって得られる。従って主にX方向の変位のみをXYプロッタに描画するには，これを横軸にし，時間変化を縦軸にした。

$m=3.12(\text{kg})$ ，バネの弾性係数 $k=87.2(\text{N/m})$ を使った場合の測定例を図8に示す。振幅は平均50mmで，1周期ごとに減衰しているのがわかる。左側に速度が棒グラフ状に示してある。中央の運動の軌跡は，連続100回の測定結果を示しており，数値は連続に50回，X座標，Y座標，X方向変位(振幅)，Y方向変位，時間，速度の順にプリンタで打ち出している。速度グラフから速度は振動の中心で最大値をとり，振幅が最大値をとる時最小値をとることがわかる。振動の減少の割合と速度の最大値の減少の割合は式(4)からもわかるように，実験値も一致する。位置のエネルギー U と運動エネルギー K とが互に変換される過程も数値計算可能となり教材として用いられる。

次に数分間測定を空けた場合の運動の変化を図9に示す。この結果，1回当りのエネルギー損失が直ちに計算可能であり，振幅が少ないといかにエネルギー損失が少なくなるかがわかる。

The Plot of Pendulum Motion
NAGANO NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
Department of Applied Physics

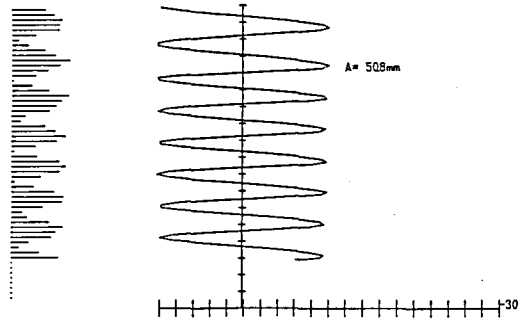


図8 ばねによる振り子の運動の測定例

The Plot of Pendulum Motion
NAGANO NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
Department of Applied Physics

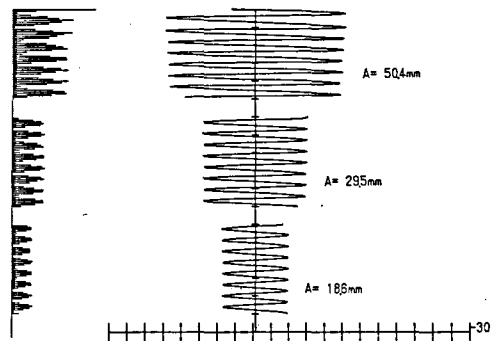


図9 ばねによる振り子の運動の時間的变化

表2 ばねによる運動の測定値と数処理例

I= 1X= 965Y= 387A=261B= -7T=29.0V=43.52	I= 26X= 779Y= 391A= 27B= -1T=X200.0V=3.00
I= 2X=1226Y= 380A= 46B= -2T=35.0V=6.53	I= 27X= 806Y= 390A= 84B= -3T=X209.0V=X10.51
I= 3X=1272Y= 378A= 10B= 0T=42.0V=1.43	I= 28X= 890Y= 387A=120B= -2T=X217.0V=X15.00
I= 4X=1282Y= 378A=-32B= 1T=49.0V=5.34	I= 29X=1010Y= 385A=122B= -1T=X225.0V=X15.26
I= 5X=1250Y= 379A=-69B= 1T=55.0V=9.86	I= 30X=1132Y= 381A= 98B= -2T=X233.0V=X12.25
I= 6X=1181Y= 380A=-92B= 2T=62.0V=X13.15	I= 31X=1230Y= 379A= 48B= -1T=X241.0V=5.33
I= 7X=1089Y= 382A=X-102B= 3T=69.0V=X17.01	I= 32X=1278Y= 378A=-12B= -1T=X250.0V=1.51
I= 8X= 987Y= 385A=-97B= 2T=75.0V=X13.66	I= 33X=1266Y= 377A=-69B= 4T=X258.0V=6.64
I= 9X= 890Y= 387A=-73B= 2T=82.0V=X10.43	I= 34X=1197Y= 381A=X-109B= 3T=X266.0V=X13.63
I= 10X= 817Y= 389A=-37B= 1T=89.0V=6.17	I= 35X=1088Y= 384A=X-124B= 3T=X274.0V=X15.50
I= 11X= 780Y= 390A= 4B= 1T=95.0V=0.59	I= 36X= 964Y= 387A=X-109B= 0T=X282.0V=X12.11
I= 12X= 784Y= 391A= 45B= 0T=X102.0V=6.43	I= 37X= 855Y= 387A=-64B= 2T=X291.0V=8.00
I= 13X= 829Y= 391A= 86B= -2T=X109.0V=X11.43	I= 38X= 791Y= 389A= -6B= 1T=X299.0V=0.76
I= 14X= 909Y= 389A=100B= -2T=X116.0V=X16.67	I= 39X= 785Y= 390A= 53B= -1T=X307.0V=7.25
I= 15X=1092Y= 387A=101B= -5T=X122.0V=X14.45	I= 40X= 843Y= 389A=103B= -2T=X315.0V=X11.45
I= 16X=1110Y= 382A= 88B= -2T=X129.0V=X12.57	I= 41X= 945Y= 387A=124B= -3T=X324.0V=X15.50
I= 17X=1199Y= 380A= 62B= -3T=X136.0V=X10.35	I= 42X=1070Y= 384A=110B= -2T=X332.0V=X13.75
I= 18X=1260Y= 377A= 23B= -1T=X142.0V=3.29	I= 43X=1180Y= 382A= 77B= -3T=X340.0V=9.63
I= 19X=1283Y= 376A=-17B= 1T=X149.0V=2.43	I= 44X=1257Y= 379A= 19B= -1T=X348.0V=2.38
I= 20X=1266Y= 377A=-57B= 2T=X156.0V=9.51	I= 45X=1276Y= 378A=-39B= -1T=X356.0V=4.33
I= 21X=1209Y= 379A=-85B= 2T=X162.0V=X12.15	I= 46X=1237Y= 377A=-90B= 3T=X365.0V=X11.26
I= 22X=1124Y= 381A=X-100B= 4T=X169.0V=X14.30	I= 47X=1147Y= 380A=X-117B= 4T=X373.0V=X14.63
I= 23X=1024Y= 385A=X-123B= 4T=X176.0V=X15.38	I= 48X=1030Y= 384A=X-121B= 3T=X381.0V=X15.13
I= 24X= 901Y= 389A=-89B= 1T=X184.0V=X11.13	I= 49X= 909Y= 387A=-68B= 2T=X389.0V=X11.00
I= 25X= 812Y= 390A=-33B= 1T=X192.0V=4.13	I= 50X= 821Y= 389A=-37B= 2T=X397.0V=4.12

MAX OF X= 1283
MIN OF X= 779
AMPLITUDE OF X= 504

これら楕円振動も含めて、振動の変化の状態、その原因、数値計算、そのわかり易い表示法等は今後の研究課題である。

4. 結 言

応用物理教育において、水平平面内および垂直平面内における振り子の運動を、できるだけ簡単な方法でしかも迅速に表示する方法を述べた。

これによって多くの理論的取扱いのみでなく、実験的取扱いも可能になり、振り子運動が深い思考に適したよりよい教材となることが期待できる。

参 考 文 献

- (1) 宮坂忠昭：応用物理教育，Vol.13，No.1 1988
- (2) MSX テクニカルデータブック①，② アスキー
- (3) 宮坂忠昭：応用物理学会応用物理教育研究会会報，Vol.11，No.1 1986
- (4) マイタブレット-II，KD4030A 取扱い書，グラフテック
- (5) 理科年表，1988，丸善