

数式処理システムのねじ解析理論への応用*

岸 佐年**・両角 宗晴***・中沢 喜昌****

An Application of Algebraic Computation System
to the Theory of the Screw Thread Analysis

Satoshi KISHI, Muneharu MOROZUMI and Yoshimasa NAKAZAWA

Algebraic computation system which operates on general-purpose computer has been widely used in the fields of physics and mathematics. In this article, an application of algebraic computation system, "REDUCE", which operates on personal computer to the theory of the screw thread analysis is reported. Through this application, approximate formulas expanded in a series are derived from a transcendental equation of a certain variable. The complicated procedure of the expanding method is made easy and quick by the successful application of algebraic computation system which operates on personal computer. Also more accurate approximating formulas are now obtainable.

1. 緒 言

近年、大型電算機上で稼働する数式処理システムが開発され数学や物理学などの分野で広く用いられている。また最近では小型電算機であるパーソナルコンピュータ（以下パソコンと言う）上への数式処理システムの移植が急速に進み、その利用環境は整備されつつある。しかし機械工学の分野でこの数式処理システムを用いた例は少ない。

一方ねじ解析理論には超越方程式がしばしば現れるが、この超越方程式から数値的解答を得るには試行錯誤的手法により電算機を用いて根を求めなければならない。しかもこの手法は正しい根の所在を確かめることが不可欠であるなどの不具合点も併せ持つ。そこで超越方程式から展開計算法を用いて未知数を得るための精密な近似計算式を求めておけば、試行錯誤法を用いる必要も無く、しかも関数の変化傾向を知ることにも容易に成るなど意義が大きい。著者の内の一人は、超越方程式を無限項級数に展開し、これを未知数についてのべき級数の形に整理し、各項の係数をすべて大きさの順に分割し、これにより高精度の微小項を含む精度の高い近似計算式を求めることのできる方法（両角の方法）を開発している¹⁾。しかしこの展開計算法を人手により行うことは膨大な労力を要し、またその計算過程の吟味も容易で

* 平成元年10月28日 日本機械学会山梨地方講演会にて発表

** 機械工学科 助教授

*** 信州大学 名誉教授

**** 一般科 助教授

原稿受付 平成元年9月26日

はない。

本研究ではこの展開計算法をパソコン上で稼働する数式処理システム REDUCE を用いて行うことを目的として、ねじホブの二番取り研削砥石輪郭の近似計算式を求める場合および3形ウォームのねじ山形輪郭を表す近似計算式を求める場合とに応用した。そしてこれらの場合について数式処理システム REDUCE によるプログラムを作成し、これを用いて二番取り研削砥石の輪郭および3形ウォームのねじ山形輪郭を求める高精度の近似計算式を導出し、さらにその近似計算式の誤差評価を行い高精度の近似計算式が人手を介する時のように膨大な労力を必要とせず容易に得られるように成ったことを確認した。

2. 展開計算法の概要

いま θ に関する超越方程式を無限項級数に展開し、これを未知数についてべき級数の形に整理したものを次のように書く。

$$f(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + A_4\theta^4 + A_5\theta^5 + \dots = 0 \quad (1)$$

そしてこの係数 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ のすべての項を大きさの順に分割する。ただし便宜上 0.1 程度の大きさのものを1次の微小項と呼び、0.01, 0.001, ……などはそれぞれ2次の微小項、3次の微小項と呼ぶことにする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_{01} + A_{02} + A_{03} + A_{04} + \dots \\ &\quad (1\text{次}) \quad (2\text{次}) \quad (3\text{次}) \quad (4\text{次}) \\ A_1 &= A_{10} + A_{11} + A_{12} + A_{13} + \dots \\ &\quad (0\text{次}) \quad (1\text{次}) \quad (2\text{次}) \quad (3\text{次}) \\ A_2 &= A_{20} + A_{21} + A_{22} + \dots \\ &\quad (0\text{次}) \quad (1\text{次}) \quad (2\text{次}) \\ A_3 &= A_{30} + A_{31} + \dots \\ &\quad (0\text{次}) \quad (1\text{次}) \\ A_4 &= A_{40} + \dots \\ &\quad (0\text{次}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし θ は1次またはそれ以下の微小値でありこれを次のように書く。

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \dots \quad (3)$$

(1次) (2次) (3次) (4次)

いま θ を3次の微小項まで正確に求めることを考える。まず式(1)で1次の微小項までを採りそれ以下の微小項はすべて捨てると次式を得る。

$$f(\theta_1) = A_{01} + A_{10}\theta_1 = 0 \quad (4)$$

これより次式を得る。

$$\theta_1 = -\frac{A_{01}}{A_{10}} \quad (5)$$

次に式(1)で2次の微小項までを採りそれ以下の微小項はすべて捨てると次式を得る.

$$f(\theta_1 + \theta_2) = A_{01} + A_{02} + A_{10}\theta_1 + A_{10}\theta_2 + A_{11}\theta_1 + A_{20}\theta_1^2 = 0 \quad (6)$$

これに式(4)を代入して次式を得る.

$$A_{02} + A_{10}\theta_2 + A_{11}\theta_1 + A_{20}\theta_1^2 = 0 \quad (7)$$

この式(7)の各項はすべて2次の微小項である. これより次式を得る.

$$\theta_2 = -\frac{A_{02} + A_{11}\theta_1 + A_{20}\theta_1^2}{A_{10}} \quad (8)$$

同様に式(1)のうちで3次の微小項までを採りそれ以下の項はすべて捨てると次式を得る.

$$\begin{aligned} f(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = & A_{01} + A_{02} + A_{03} + A_{10}\theta_1 + A_{11}\theta_1 + A_{12}\theta_1 + A_{10}\theta_2 + A_{11}\theta_2 \\ & + A_{10}\theta_3 + A_{20}\theta_1^2 + A_{21}\theta_1^2 + 2A_{20}\theta_1\theta_2 + A_{30}\theta_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

これに式(6)を代入して次式を得る.

$$A_{03} + A_{12}\theta_1 + A_{11}\theta_2 + A_{10}\theta_3 + A_{21}\theta_1^2 + 2A_{20}\theta_1\theta_2 + A_{30}\theta_1^3 = 0 \quad (10)$$

この式(10)はすべて3次の微小項のみから成り, これより次式を得る.

$$\theta_3 = -\frac{A_{03} + A_{12}\theta_1 + A_{11}\theta_2 + A_{21}\theta_1^2 + 2A_{20}\theta_1\theta_2 + A_{30}\theta_1^3}{A_{10}} \quad (11)$$

すなわち θ の1次の微小項は式(5)により, 2次の微小値は式(8)により, 3次の微小値は式(11)によりそれぞれ求められ, これを式(3)に代入することにより θ を要求された3次の微小値まで求めることができる.

3. ねじホブの二番取り研削砥石輪郭計算式

3-1 ねじホブの二番取り研削砥石輪郭の計算法

ねじホブの二番取り研削砥石の輪郭を求めるための関係式としてそれぞれ次式が与えられている²⁾.

$$\begin{aligned} f(\theta) = & -bk + k^2\theta + \left\{ kR_a \sin \gamma_{ia} + bR \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \right] \right. \\ & \left. - kR \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \right] \cdot \theta \right\} \sin \theta \\ & + \left\{ -bR_a \sin \gamma_{ia} + kR \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \right] \right. \\ & \left. + kR_a \sin \gamma_{ia} \cdot \theta \right\} \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

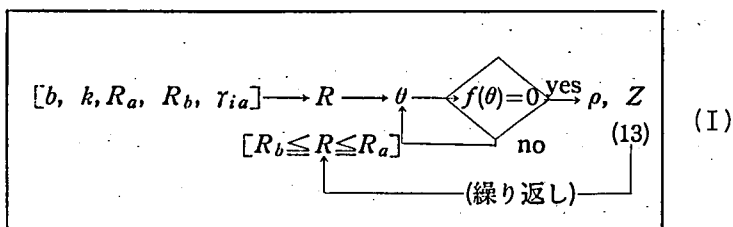
ただし

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\rho = \left\{ (b - k\theta) \left[b - k\theta - 2 \left\{ R \cos \theta \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \right] + R_a \sin \gamma_{ia} \sin \theta \right\} \right] + R^2 \cos^2 \left[\sin^{-1} \left(\frac{R_a}{R} \sin \gamma_{ia} \right) \right] + R_a^2 \sin^2 \gamma_{ia} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$Z = (R_a' - R) \tan \alpha_c$$

ここで θ はホブの基礎形を表すための偏角, b は砥石軸とホブ軸との二番取りはじめの距離, k は二番取り係数, R_a はホブの外半径, R_a' はホブの外周縁が尖っているものと考えたときの外半径, R はホブの任意半径, R_b はホブの谷半径, γ_{ia} はホブ外径における切れ刃面のすくい角, γ_{ja} はホブの外周前二番角, α_c はホブの円錐底角 (工具圧力角) を示す. これらの各式を用いて次の計算手順により砥石の輪郭を求めることができる.



この場合, 式 (12) から θ を求めるためには試行錯誤法を用いなければならない. そこで図 1 に示すようにホブのピッチ円半径 R_c に対応する砥石輪郭上の点 Q において砥石輪郭への接線を考え, この接線の傾き角 α_G と接線からの輪郭の軸方向偏倚量 δ_G を求めるための近似計算式として次式が与えられている²⁾.

$$\tan \alpha_G = \tan \alpha_c \left(1 + \frac{\tan^2 \gamma_{ja}}{2} + \tan \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} \right) \quad (14)$$

$$\delta_G = \frac{\tan \alpha_c}{R_c} \left(\frac{\tan^2 \gamma_{ja}}{2} + \tan \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} \right) u^2 \quad (15)$$

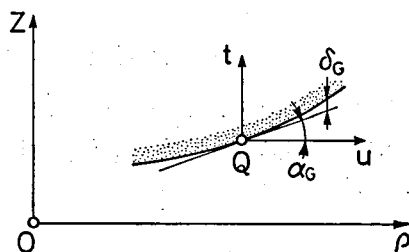


図 1 二番取り研削砥石の軸断面輪郭

この近似計算式は前述の展開計算法を用いて人手により膨大な労力を費やして求められた.

3-2 数式処理システムを応用した展開計算法

いま数式処理システム REDUCE を応用して前述の展開計算法を行い, ねじホブの二番取り研削砥石輪郭を計算する近似式を求めることを考える. そこで式 (12) を R_c で除し, $k/R_c = K$, $\sin \gamma_{ia} = s$, $(R - R_c)/R_c = \Delta$, $(R_a - R_c)/R_c = \Delta_a$, $b/R_c = B$ と置き換え, K , s , Δ , Δ_a はすべて 1 次の微小値とし, B は 0 次の微小値として式 (12) を無限項級数に展開し 4 次の微小

項まで求め次式を得た。これは式(1)に相当する。

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = & -\left(1 - \frac{1}{B}\right)K - s + \frac{K\Delta}{B} - s\Delta_a - \frac{Ks^2}{2B} + \frac{Ks^2\Delta}{2B} - \frac{Ks^2\Delta_a}{B} \\
 & + \left(1 + \Delta + \frac{K^2}{B} - \frac{s^2}{2} + \frac{2Ks}{B} + \frac{s^2\Delta}{2} - s^2\Delta_a + \frac{2Ks\Delta_a}{B}\right)\theta \\
 & + \left(\frac{s}{2} - \frac{3K}{2B} - \frac{3K\Delta}{2B} + \frac{s\Delta_a}{2}\right)\theta^2 \\
 & + \left(-\frac{1}{6} - \frac{\Delta}{6}\right)\theta^3 = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

この式(16)を用い、 $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ として両角の方法により θ を4次の微小項まで求め次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \theta = & \left(1 - \frac{1}{B}\right)K + s + s\Delta_a - (K + s)\Delta + (K + s)\Delta^2 + \frac{s^3}{6} \\
 & - s\Delta\Delta_a - \frac{K^2s}{B^2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2B^2} + \frac{4}{3B^3}\right)K^3 - (K + s)\Delta^3 \\
 & + s\Delta^2\Delta_a + \left(\frac{3}{2B^2} - \frac{1}{2}\right)K^3\Delta - \frac{s^3\Delta}{2} + \frac{K^2s\Delta}{B^2} - \frac{K^2s\Delta_a}{B^2} + \frac{s^3\Delta_a}{2}
 \end{aligned} \quad (17)$$

次に式(13)を R_c で除し、 $K, s, \Delta, \Delta_a, B$ などは前述と同様に置き換えて展開計算を行い、これに式(17)の θ を代入して整理し、さらに図1に示すようにホブのピッチ円半径 R_c に対応する砥石輪郭上の点Qに原点を持つ $Q-ut$ 座標系により5次の微小項までを表す次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{u}{R_c} = & -\left(1 - \frac{K^2}{2} - Ks - Ks\Delta_a + \frac{K^4}{2B^2} + \frac{K^3s}{2B^2} - \frac{K^4}{8} - \frac{Ks^3}{2}\right)\Delta \\
 & - \left(\frac{K^2}{2} + Ks + Ks\Delta_a\right)\Delta^2 - \left(\frac{K^2}{2} + Ks\right)\Delta^3 \\
 \frac{t}{R_c} = & -\Delta \tan \alpha_c
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

この式(18)の二つの式から Δ を消去して次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{R_c} = & \frac{1}{\tan \alpha_c} \left(1 - \frac{K^2}{2} - Ks - Ks\Delta_a + \frac{K^4}{2B^2} + \frac{K^3s}{2B^2} - \frac{K^4}{8} - \frac{Ks^3}{2}\right) \left(\frac{t}{R_c}\right) \\
 & - \frac{1}{\tan^2 \alpha_c} \left(\frac{K^2}{2} + Ks + Ks\Delta_a\right) \left(\frac{t}{R_c}\right)^2 - \frac{1}{\tan^3 \alpha_c} \left(\frac{K^2}{2} + Ks\right) \left(\frac{t}{R_c}\right)^3
 \end{aligned} \quad (19)$$

さらに式(19)からべき級数の関数の逆関数を求める方法³⁾⁴⁾により展開計算を行い、5次の微小項まで求め次式を得る。

$$t = \tan \alpha_c \left(1 + \frac{K^2}{2} + Ks + KsA_a + \frac{3K^4}{8} + K^3s + K^2s^2 + \frac{Ks^3}{2} - \frac{K^4}{2B^2} - \frac{K^3s}{2B^2} \right) u \\ + \frac{\tan \alpha_c}{R_c} \left(\frac{K^2}{2} + Ks + KsA_a \right) u^2 + \frac{\tan \alpha_c}{R_c^2} \left(\frac{K^2}{2} + Ks \right) u^3 \quad (20)$$

これら一連の計算を数式処理システム REDUCE を用いて行った。表1にそのプログラムの一部を示す。さて式(20)の第1項は砥石輪郭上の点Qにおける輪郭への接線を表し、第2項以下が接線からの偏倚量を表す。そこで K, s, A, A_a, B などの置き戻しを行い砥石輪郭への接線の傾き角 α_G と接線からの偏倚量 δ_G を求めるための高精度の近似計算としてそれぞれ次式を得る。ただし $K = k/R_c \doteq \tan \gamma_{ja}$ とする。

$$\tan \alpha_G = \tan \alpha_c \left[1 + \frac{\tan^2 \gamma_{ja}}{2} + \left(1 + \frac{R_a - R_c}{R_c} \right) \tan \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} + \left(1 - \frac{R_c^2}{2b^2} \right) \tan^3 \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \tan \gamma_{ja} \sin^3 \gamma_{ia} + \tan^2 \gamma_{ja} \sin^2 \gamma_{ia} + \left(\frac{3}{8} - \frac{R_c^2}{2b^2} \right) \tan^4 \gamma_{ja} \right] \quad (21)$$

$$\delta_G = \frac{\tan \alpha_c}{R_c} \left[\frac{\tan^2 \gamma_{ja}}{2} + \left(1 + \frac{R_a - R_c}{R_c} \right) \tan \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} \right] u^2 \\ + \frac{\tan \alpha_c}{R_c^2} \left(\frac{\tan^2 \gamma_{ja}}{2} + \tan \gamma_{ja} \sin \gamma_{ia} \right) u^3 \quad (22)$$

3-3 数値計算例

いま数値例として $R_a = 20.0\text{mm}$, $R_c = 19.513\text{mm}$, $R_a' = 20.152\text{mm}$, $R_b = 19.036\text{mm}$, $\alpha_c = 30^\circ 3'$, $k = 1.7498\text{mm/rad}$, $\gamma_{ja} = 5^\circ$, $\gamma_{ia} = 15^\circ$ と置いて $b = 50, 70, 90\text{mm}$ の場合について数値計算を行った。この場合、予め $R = R_c$ の値に対して計算手順(I)を用いて砥石輪郭上の点Qの座標値 (ρ_Q, Z_Q) を求め、さらに計算手順(I)を用いて点Qにおける砥石輪郭への接線の傾き角 α_G を図式微分的に求めておき、次に任意の R の値に対して計算手順(I)により R に対応する砥石輪郭上の点の座標値 (ρ, Z) を求めた。そしてこれらの計算値から $u = (\rho - \rho_Q)$ として砥石輪郭の軸方向偏倚量 δ_G を $\delta_G = Z - Z_Q - u \tan \alpha_G$ により計算した。

これと平行して著者の内の一人が以前に求めた近似計算式(14), (15)により近似値 α_{G1} , δ_{G1} を計算し、さらに本研究において数式処理システム REDUCE を用いて求めた近似計算式(21), (22)により近似値 α_{G2} , δ_{G2} を計算した。これら計算結果の内から α_G と $R = R_a$ に対応する $\delta_G = \delta_{G\max}$ とを表2に示す。

表2 数値計算結果の比較

	b = 50mm	b = 70mm	b = 90mm
α_G	30°46' 40"	30°46' 41"	30°46' 42"
α_{G1}	30°43' 18"	30°43' 18"	30°43' 18"
α_{G2}	30°46' 22"	30°46' 23"	30°46' 23"
$\delta_{G\max}$	0.21 μm	0.21 μm	0.21 μm
$\delta_{G1\max}$	0.18 μm	0.18 μm	0.18 μm
$\delta_{G2\max}$	0.18 μm	0.18 μm	0.18 μm

表1 数式処理システム REDUCE によるプログラム例

```

*****Screwjob Relieving Wheel*****;
off nat;
array aa(10),cc(10),ww(10);
fq(q):=-b*k+k**2*q+(k*rra*sin(gmma)+b*rrr*cos(asin(rrarr*sin(gmma)))
-k*rrr*cos(asin(rrarr*sin(gmma)))*q)*sin(q)+(-b*rra*sin(gmma)
+k*rrr*cos(asin(rrarr*sin(gmma)))+k*rra*sin(gmma)*q)*cos(q)$
dfrho(q):=(b-k*q)*(b-k*q-2*(rr*cos(q)*cos(asin(rrarr*sin(gmma)))
+rra*sin(gmma)*sin(q))+rr**2*cos(asin(rrarr*sin(gmma)))*2+rra**2
*sin(gmma)**2$
zzd:=(rrad-rr)*tan(ac)$ sin(gmma):=s$
fq(q):=fq(q)/b/rrc$ dfrho(q):=dfrho(q)/rrc**2$ fzzd:=zzd/rrc$
k/rrc:=kk$ b/rrc:=bb$ rr/rrc:=1+d$ rra/rrc:=1+da$ rrad/rrc:=1+dad$
rrarr:=1+da-d-da*d+d**2+da*d**2-d**3-da*d**3+d**4-d**5-da*d**5$
forall x let
  sin(x)=x-x**3/6+x**5/120-x**7/5040,
  cos(x)=1-x**2/2+x**4/24-x**6/720+x**8/40320,
  asin(x)=x+x**3/6+3*x**5/40+5*x**7/112,
  ssqrt(x)=1+x/2-x**2/8+x**3/16-5*x**4/128+7*x**5/256;
weight x=1, kk=1, s=1, d=1, da=1, dad=1, q=1$
wtlevel 4$ fq(q):=fq(q); on div;
clear fq1,fq2,fq3,fq4;
fq1:=fq(q)$ fq2:=fq(q)$ fq3:=fq(q)$ fq4:=fq(q)$
clear q,q1,q2,q3,q4; q:=q1+q2+q3+q4$
weight q1=1,q2=2,q3=3,q4=4$
wtlevel 1$ q:=q1$fq1:=fq1$ q1:=-fq1+q1$
wtlevel 2$ q:=q1+q2$ fq2:=fq2$ q2:=-fq2+q2$
wtlevel 3$ q:=q1+q2+q3$ fq3:=fq3$ q3:=-fq3+q3$
wtlevel 4$ q:=q1+q2+q3+q4$ fq4:=fq4$ q4:=-fq4+q4$ q:=q; off div;
clear qs; qs:=q$
clear q$ weight q=1$
wtlevel 5$ dfrho:=dfrho(q)$ fzzd:=fzzd$
clear dfrho1,dfrho2;
let s=0,d=0,da=0,dk=0,q=0$ dfrho1:=dfrho$
clear s,d,da,dk,q$
weight s=1,d=1,da=1,dk=1,q=1$ dfrho2:=(dfrho-dfrho1)/dfrho1$
clear frho1,frho2; frho1:=sqrt(dfrho1)$
frho2:=ssqrt(dfrho2)$ frho:=frho1*frho2$
clear q$ q:=qs$ frho:=frho$
clear frhoq,fzzdq$
let d=0$ frhoq:=frho$ fzzdq:=fzzd$
clear d$
weight d=1$ uu:=frho-frhoq$ tt:=fzzd-fzzdq$
on gcd; on div; uu:=uu; tt:=tt;
clear tt$
let d=-tt/tanac$
wtlevel 5$ uu:=uu; tt:=tt/rc; ul:=uu*rc;
for n:=0:4 do write aa(n):=coeffn(ul,tl,n);
wtlevel 0$ ab:=aa(1); wtlevel 5$ ab1:=aa(1)-ab;
operator aa1;
forall x let
  aa1(x)=1-x*x**2-x**3+x**4-x**5; x:=ab1/ab$ alal:=aa1(x)/ab;
  cc(1):=1*alal; cc(2):=-aa(2)*alal**3;
  cc(3):=(-aa(1)*aa(3)+2*aa(2)**2)*alal**5;
  cc(4):=(-aa(1)**2*aa(4)+5*aa(1)*aa(2)*aa(3)-5*aa(2)**3)*alal**7;
weight u=1$
clear tl$ tl:= for i:=1:4 sum cc(i)*(u-aa(0))**i;
wtlevel 4$ tanag:=cc(1);
wtlevel 5$ dg:=tl-tanag*u;
clear s,dk; s:=singia; dk:=tangja; tanag:=tanag; dg:=dg;
end;

```

これら計算結果から、本研究で求めた近似計算式は砥石輪郭への接線の傾き角 α_G を計算する式の場合にはかなりの精度まで近似度が上がったことが分かり、また砥石輪郭の偏倚量 δ_G を計算する式の場合は元々の偏倚量がミクロンオーダー以下であったため近似度が上がるまでの効果は見られなかった。

4. 3形ウォームのねじ山形輪郭計算式

4-1 3形ウォームのねじ山形輪郭の計算式

いま図2に示すような座標系において3形ウォームのねじ山形輪郭を表すための関係式としてそれぞれ次式が与えられている⁵⁾。ただし r はウォームの任意円半径、 r_c はウォームのピッチ円半径、 β_c はウォームの進み角、 P はウォームのピッチ、 n はウォームの条数、 ρ は紡錘形工具の任意半径、 ρ_c は紡錘形工具のピッチ円半径、 α_c は紡錘形工具の圧力角、 θ は工具面を表すための偏角、 λ は工具のウォーム軸回りの回転角、 a はウォーム軸と工具軸との最短距離をそれぞれ示し、また複号は図2の輪郭①、②の順である。

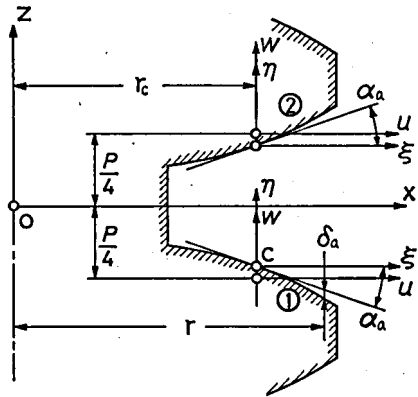


図2 3形ウォームのねじ山形

$$\begin{aligned} x &= r \\ z &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \mp \left[\frac{P}{4} \cos \beta_c + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c + r_c \tan \beta_c \cdot \lambda \end{aligned} \quad (23)$$

ただし

$$r^2 = (a - \rho \cos \theta)^2 + \left\{ \rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{P}{4} \cos \beta_c + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c \right\}^2 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{P}{4} \cos \beta_c \cot \alpha_c + \rho_c \right) \sin^2 \alpha_c \\ &+ (a - r_c) \cos^2 \alpha_c \sec \theta \mp \sin \alpha_c \cos \alpha_c \tan \theta (a \cot \beta_c + r_c \tan \beta_c) \end{aligned} \quad (25)$$

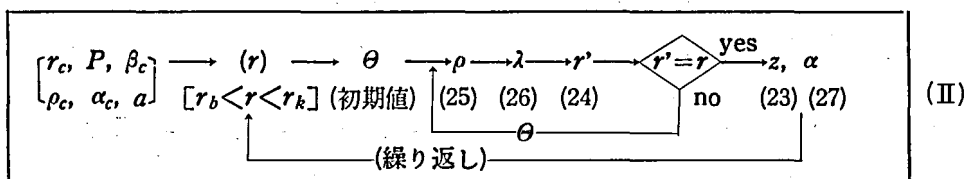
$$\tan \lambda = \frac{\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{P}{4} \cos \beta_c + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c}{a - \rho \cos \theta} \quad (26)$$

またねじ山形輪郭上の任意半径 r の点において輪郭に接線を引き、その輪郭が x 軸となす角を α とすれば、 α の値は次の計算式により求められる。

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \mp \{ r \cos^2 \alpha_c \sec^2 \theta [(a - r_c) \sin \theta \mp (a \cot \beta_c + r_c \tan \beta_c) \tan \alpha_c] [(\sin \theta \sin \beta_c \\ &\mp \tan \alpha_c \cos \beta_c) (a - \rho \cos \theta) - r_c \tan \beta_c (\tan \lambda \cos \theta + \sin \theta \cos \beta_c \\ &\pm \tan \alpha_c \sin \beta_c) \cos^2 \lambda] + r \rho [\cos \theta \sin \beta_c (a - \rho \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r_c \tan \beta_c \cos \theta \cos^2 \lambda (\tan \lambda \tan \theta - \cos \beta_c)] \\
 & \times \left\{ \left[(a - \rho \cos \theta) \cos \theta - \left\{ \rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{P}{4} \cos \beta_c + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c \right\} \right. \right. \\
 & \times (\sin \theta \cos \beta_c \pm \tan \alpha_c \sin \beta_c) \Big] \\
 & \times \cos^2 \alpha_c \sec^2 \theta [(a - r_c) \sin \theta \mp (a \cot \beta_c + r_c \tan \beta_c) \tan \alpha_c] \\
 & - (a - \rho \cos \theta) \rho \sin \theta - \left\{ \rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{P}{4} \cos \beta_c + (\rho_c - \rho) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c \right\} \\
 & \times \rho \cos \theta \cos \beta_c \Big]^{-1} (a - \rho \cos \theta)^{-1} \quad (27)
 \end{aligned}$$

そこでこれらの各式を用いて次の計算手順によりねじ山形の理論輪郭を求めることができる。



一方この場合、ねじ山形輪郭上の半径 r_c の点における接線の傾き角 α_a とこの接線からの輪郭の軸方向偏い量 δ_a を求めるための近似計算式として次式が与えられている⁵⁾。ただし $K = r_c / \rho_c$, $\tan \beta_c = nP / (2\pi r_c)$ である。

$$\tan \alpha_a \doteq \tan \alpha_c \sec \beta_c - \frac{\pi}{2n(1+K)} \tan \beta_c \sin^2 \beta_c \sec^2 \alpha_c \left(1 + \frac{K}{1+K} \sin^2 \beta_c \cos^2 \alpha_c \right) \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_a = & \left[\frac{K}{2(1+K)} \cot \alpha_c \sin^2 \beta_c - \frac{1}{1+K} \tan \alpha_c \sec \alpha_c \sin^2 \beta_c + \frac{K(K-1)}{4(1+K)^2} \frac{\sin^4 \beta_c}{\sin \alpha_c} \right. \\
 & - \left. \frac{\pi K(K-1)}{4n(1+K)^3} \frac{\tan \beta_c \sin^4 \beta_c}{\sin^2 \alpha_c} \right] \frac{(x-r_c)^2}{r_c} \\
 & - \left[\frac{1}{2} \cot \alpha_c \sin^2 \beta_c + \frac{K^3}{6(1+K)^3} \frac{\sin^4 \beta_c}{\sin^3 \alpha_c} \right] \frac{(x-r_c)^3}{r_c^2} \quad (29)
 \end{aligned}$$

4-2 数式処理システムを応用した展開計算法

いま数式処理システム REDUCE を用いて展開計算法により3形ウォームのねじ山形の輪郭を求めることを考える。そこで $P/\rho_c = e$, $\sin \beta_c = s$, $(\rho - \rho_c)/\rho_c = A$, $\sin^2 \alpha_c = t$ と置くとこれらはすべて1次の微小値であり、また $a/\rho_c = A$, $r_c/\rho_c = B$ と置くとこれらは0次の微小値となり、また θ^2 は3次の微小値となる。そこで前述と同様に式(25)の両辺を ρ_c で除して上記の変数の置き換えを行い、級数展開計算により θ のべき級数に整理して4.5次の微小項まで求め、さらにこれから両角の方法により θ を1.5次から4次の微小項まで求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \theta = & \mp \frac{1}{A\sqrt{t}} s\Delta \pm \frac{1}{4A} es \mp \frac{1}{2A} \sqrt{t} s\Delta \mp \frac{3}{8A} \sqrt{t} ts\Delta \pm \frac{B-1}{2A^2} \frac{s^3\Delta}{\sqrt{t}} \\ & \pm \frac{1}{2A^3} \frac{s^3\Delta^2}{\sqrt{t}t} \mp \frac{B}{4A^2} es^3 \mp \frac{1}{4A^3} \frac{es^3\Delta}{t} \end{aligned} \quad (30)$$

次に式(23)を ρ_c で除して同様な変数の置き換えを行い、さらに式中の θ に式(30)を代入し、 x/ρ_c は0次から5.5次の微小項までのすべての項を、 z/ρ_c は1次から6次の微小項までのすべての項を求め次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{x}{\rho_c} = & \left(B + \frac{1}{32A} e^2 s^2 \right) + \left(-1 - \frac{1}{4A} \sqrt{t} es^2 - \frac{1}{8A} \sqrt{t} tes^2 \right) \Delta \\ & + \left(\frac{1}{2AB} \frac{s^2}{t} - \frac{1}{2AB} s^2 - \frac{1}{2A^2 t} s^4 + \frac{1}{2A} ts^2 + \frac{1}{4A^3 B} \frac{es^4}{\sqrt{t}t} \right) \Delta^2 \\ & + \left(\frac{1}{2B^2} \frac{s^2}{t} - \frac{1}{2B^2} s^2 - \frac{1}{2A^3 B} \frac{s^4}{t^2} \right) \Delta^3 + \frac{1}{2B^3} \frac{s^2}{t} \Delta^4 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\rho_c} = & \mp \left[\frac{1}{4} e + \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{t} t - \frac{3}{8} \sqrt{t} t^2 - \frac{1}{2} \sqrt{t} s^2 + \frac{1}{4A} es^2 - \frac{5}{16} \sqrt{t} t^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \sqrt{t} ts^2 - \frac{3}{8} \sqrt{t} s^4 - \frac{3}{16} \sqrt{t} t^2 s^2 - \frac{35}{128} \sqrt{t} t^4 + \frac{1}{4A^2} es^4 \right) \Delta \right. \\ & + \left(\frac{1}{AB} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{2B+1}{2AB} \sqrt{t} s^2 - \frac{4B+1}{8AB} \sqrt{t} ts^2 - \frac{B-1}{2A^2 B} \frac{s^4}{\sqrt{t}} \right) \Delta^2 \\ & \left. + \left(\frac{1}{B^2} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2B^2} \sqrt{t} s^2 - \frac{3B+1}{3A^3 B^2} \frac{s^4}{\sqrt{t}t} \right) \Delta^3 + \frac{1}{B^3} \frac{s^2}{\sqrt{t}} \Delta^4 \right] \end{aligned} \quad (32)$$

そこで $x/\rho_c - B - e^2 s^2/(32A) = u/\rho_c$, $z/\rho_c \pm e/4 = w/\rho_c$ と置いて、式(31)からべき級数の逆関数を求める方法により Δ を求め、この Δ を式(32)へ代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{w}{\rho_c} = & \mp \left[\left(-\frac{1}{32A} \sqrt{t} e^2 s^2 - \frac{1}{64A} \sqrt{t} te^2 s^2 \right) + \sqrt{t} \left(1 + \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} t^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4A} \frac{es^2}{\sqrt{t}} + \frac{5}{16} t^3 + \frac{1}{4} ts^2 - \frac{1}{4A} \sqrt{t} es^2 + \frac{3}{8} s^4 \\ & + \frac{3}{16} t^2 s^2 + \frac{35}{128} t^4 - \frac{1}{4A^2} \frac{es^4}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4A} \sqrt{t} tes^2 \left. \right) \left(\frac{u}{\rho_c} \right) \\ & + \left(\frac{1}{2AB} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{B+1}{AB} \sqrt{t} s^2 - \frac{B+1}{16AB} \sqrt{t} ts^2 - \frac{B-1}{4A^2 B} \frac{s^4}{\sqrt{t}} + \frac{B-1}{8A^3 B} \frac{es^4}{t} \right) \left(\frac{u}{\rho_c} \right)^2 \\ & \left. - \left(\frac{1}{2B^2} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4B^2} \sqrt{t} s^2 + \frac{1}{6A^3 B^2} \frac{s^4}{\sqrt{t}t} \right) \left(\frac{u}{\rho_c} \right)^3 + \frac{1}{2B^3} \frac{s^2}{\sqrt{t}} \left(\frac{u}{\rho_c} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (33)$$

この式(33)は図2の uw 座標系でウォームのねじ山形輪郭を表す式である。そこでさらに $w/\rho_c \mp \sqrt{t} e^2 s^2 / (32A) \mp \sqrt{t} t e^2 s^2 / (64A) = \eta / \rho_c$ と置くと図2において uw 座標系を w 軸方向に平行移動した $\xi\eta$ 座標系でウォームのねじ山形輪郭を表すことを意味し次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\rho_c} = & \mp \left[\sqrt{t} \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4A} \frac{es^2}{\sqrt{t}} + \frac{5}{16}t^3 + \frac{1}{4}ts^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4A} \sqrt{t} es^2 + \frac{3}{8}s^4 + \frac{3}{16}t^2 s^2 + \frac{35}{128}t^4 - \frac{1}{4A^2} \frac{es^4}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4A} \sqrt{t} tes^2 \right) \left(\frac{\xi}{\rho_c} \right) \right. \\ & + \left(\frac{1}{2AB} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{B+\frac{1}{4}}{AB} \sqrt{t} s^2 - \frac{B+\frac{1}{16}}{AB} \sqrt{t} ts^2 - \frac{B-1}{4A^2 B} \frac{s^4}{\sqrt{t}} + \frac{B-1}{8A^3 B} \frac{es^4}{t} \right) \left(\frac{\xi}{\rho_c} \right)^2 \\ & \left. - \left(\frac{1}{2B^2} \frac{s^2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4B^2} \sqrt{t} s^2 + \frac{1}{6A^3 B^2} \frac{s^4}{\sqrt{t} t} \right) \left(\frac{\xi}{\rho_c} \right)^3 + \frac{1}{2B^3} \frac{s^2}{\sqrt{t}} \left(\frac{\xi}{\rho_c} \right)^4 \right] \quad (34) \end{aligned}$$

この式(34)の第1項が図2の点Cにおける輪郭への接線を表し、従って第1項の係数が接線の傾き角 α_a を表す。そこで変数 e, s, A, t, A, B などの置き戻しを行うと、 α_a を求めるための近似計算式として式(28)とまったく同様な式を得ることができた。次に式(34)の第2項、第3項、第4項がウォームのねじ山形輪郭のピッチ点Cにおける接線からの軸方向偏倚量を表すことが理解できる。そこで前述と同様に各変数の置き戻しを行い、また $\xi = u = (x - r_c)$ であることを考慮すると偏倚量 δ_a を求めるための近似計算式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta_a = & \left[\frac{K}{2(1+K)} \cot \alpha_c \sin^2 \beta_c - \frac{1}{1+K} \tan \alpha_c \sec \alpha_c \sin^2 \beta_c \right. \\ & \left. + \frac{K(K-1)}{4(1+K)^2} \frac{\sin^4 \beta_c}{\sin \alpha_c} - \frac{\pi K(K-1)}{4n(1+K)^3} \frac{\tan \beta_c \sin^4 \beta_c}{\sin^2 \alpha_c} \right] \frac{(x-r_c)^2}{r_c} \\ & - \left[\frac{1}{2} \cot \alpha_c \sin^2 \beta_c + \frac{K^3}{6(1+K)^3} \frac{\sin^4 \beta_c}{\sin^3 \alpha_c} \right] \frac{(x-r_c)^3}{r_c^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta_c}{\sin \alpha_c} \frac{(x-r_c)^4}{r_c^3} \quad (35) \end{aligned}$$

この式(35)は前述した近似計算式(29)に比較し、より微小な項を含んでいることが分かる。

4-3 数値計算例

ウォームの諸元 $r_c = 22.5 \text{ mm}$, $P = 12.566 \text{ mm}$, $n = 1, 2, 3, 4$, 紡錘形工具の諸元 $\rho_c = 66.7$ ($K=3$) mm, $\alpha_c = 20^\circ$ の場合について、ウォームのねじ山形輪郭の軸方向偏倚量 δ_a の数値計算を行った。この場合、 $r = r_c$ において計算手順(II)によりピッチ点Cの理論的な座標値 z_c と接線の傾き角 α_a とを予め求めておき、次に任意の半径 r に対して計算手順(II)によりウォームのねじ山形輪郭上の座標値 z を求め、これらの計算結果より軸方向偏倚量 δ_a の理論値を $\delta_a = \mp(z - z_c) - (r - r_c) \tan \alpha_a$ として計算した。

これと平行して式(29)により近似値 δ_{a1} を計算し、さらに本研究において数式処理システム REDUCE を用いて求めた近似計算式(35)により近似値 δ_{a2} を計算した。これらの計算結果を表3に示す。

表3 数値計算結果の比較

ξ mm	n=1			n=2			n=3			n=4		
	δ_a	δ_{a1}	δ_{a2} μm	δ_a	δ_{a1}	δ_{a2} μm	δ_a	δ_{a1}	δ_{a2} μm	δ_a	δ_{a1}	δ_{a2} μm
4	4.0	3.8	4.1	15.8	15.0	16.0	34.4	32.2	34.4	58.4	54.2	57.9
3	2.4	2.4	2.4	9.5	9.2	9.5	20.6	19.9	20.6	35.0	33.6	34.8
2	1.1	1.1	1.1	4.5	4.4	4.5	9.8	9.6	9.8	16.6	16.3	16.6
1	0.3	0.3	0.3	1.2	1.2	1.2	2.6	2.6	2.6	4.5	4.4	4.4
-1	0.3	0.3	0.3	1.4	1.4	1.4	3.0	3.0	3.0	5.1	5.1	5.1
-2	1.5	1.5	1.5	5.9	5.8	5.9	12.9	12.8	12.9	22.3	21.9	22.1
-3	3.6	3.5	3.6	14.2	13.9	14.2	31.4	30.5	31.1	54.4	52.4	53.6
-4	6.9	6.6	6.8	27.3	26.0	27.0	60.6	57.3	59.4	105.5	98.7	102.4

これら計算結果から、近似値 δ_{a2} は δ_{a1} に比べ理論値 δ_a により近い値となっていることが分かり、本研究のより高精度な近似計算式を求めるという目的を満足していることが理解できる。

5. 結 言

数式処理システム REDUCE を、ねじ解析理論の一分野である超越方程式から未知数を求めるための近似計算式を導出する展開計算法に応用した。この結果これまで人手を介して行われていた膨大な量の展開計算がパソコンなどの小型電算機によっても簡単に行えることが明らかになった。そして解析例に対して応用して導いた近似計算式を用いて数値計算を行い、近似の精度がより高くなったことを確認した。またこれまで機械工学の分野で電算機を用いる場合には専ら厳密な数値計算が行われていたが、本研究のように数式処理システムを用いて数式計算（演算）を行う方面においても広く電算機を用いることができることを示した。

参 考 文 献

- 1) 両角宗晴：理工学のための数学ハンドブック，丸善（1960），102.
- 2) 両角宗晴：ねじホブの研究（其の2），岩手大学工学部研究報告，3（1951），121.
- 3) 藤井康治：ラック型カッタによるインボリュート歯車の切下げ量について，日本機械学会論文集，9，35（1943），37.
- 4) 小倉金之助・矢野健太郎監修：基礎数学ハンドブック，森北出版（1964），284.
- 5) 両角宗晴：3形ウォームのねじ山形の近似計算式とその誤差の評価，精密機械，47，2（1981），147.