

## 境界—有限要素を用いた凍結地盤の解析

遠藤 典男\*・三井 康司\*\*

## Analysis of Frozen Soil Using by BE-FE Coupling Procedure

Norio ENDOH and Yasushi MITSUI

Ground freezing problems seem to be more important in civil engineering. Artificial freezing techniques employed for hardening soft ground and shutting off underground water. Recently large underground storages of cryogenic liquid, such as LNG or LPG tanks, have been constructed.

In this paper an numerical procedure is proposed to evaluate freezing fronts of soil and heaving effectively.

## 1. はじめに

地盤の凍結現象は、建設工学の分野において重要な問題である。人工凍結技術を用いた軟弱地盤の一時的な強化対策、遮水を目的とした凍結工法も実施されつつある。また LNG, LPG のような極低温地下貯蔵タンクの建設も、近年盛んになっており、タンク周辺の地盤凍結が問題になる。

地盤が凍結する際、未凍結領域からフリージング・フロントに向かって間隙水が移動して氷に変化し、体積膨張が生じる。その結果、種々の現象が複雑に作用して凍上現象あるいは凍結土圧等が生じ、これらが周辺の地盤、構造物に影響を及ぼすことになる。そのため、この有害な凍結膨張と密接に関連する凍結領域の経時的变化を高精度で算定する必要がある。したがって、本解析では凍結管近傍を有限要素で、他の均一地盤を境界要素で離散化するという FE—BE 結合手法を用いて熱伝導解析を行い、凍結膨張量及び凍上量を算出しようとするものである。

また、本解析では地盤凍結工法における凍結管が他の地盤と不連続であることを考慮し、これを Garting/Thomas により提案された手法を適用して、FE 四角形要素により離散化し熱伝導解析を行っている。

## 2. 境界—有限要素の結合手法による非定常熱伝導解析

2次元非定常熱伝導問題の支配方程式は、発熱を考えない場合、次式で与えられる。

\* 土木工学科 助手

\*\* 信州大学工学部

原稿受付 平成元年9月26日

$$\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (1)$$

ここに、 $\phi = \phi(x, y, t)$  は温度であり、空間、時間の関数である。  $\rho$  は密度、  $c$  は比熱、  $k_x$ 、  $k_y$  は  $x$ 、  $y$  方向の熱伝導係数である。 なお、境界要素領域では  $k_x = k_y = k$  とする。

また、関連する境界条件及び初期条件は、

境界条件：

○領域  $\Gamma_1$  上で温度規定がある場合

$$\phi = \bar{\phi} \quad (2)$$

○領域  $\Gamma_2$  上で熱流束規定がある場合

$$q = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad (3)$$

初期条件：

○領域  $\Omega$  内において  $t=0$  で

$$\phi = \phi_0(x, y) \quad (4)$$

となる。

まず、FE領域  $\Omega_F$  に対して、FEMによる離散化を行うと、式(1)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ k_x \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + k_y \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] \{\phi\} d\Omega + \int_{\Omega} \rho c [N]^T [N] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} d\Omega \\ & = - \int_{\Gamma} q [N]^T d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ここに  $[N]$  は内挿関数マトリックスである。

これをマトリックス表示して、

$$[k] \{\phi\} + [c] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \{Q\} \quad (6)$$

ここに  $\{\phi\}$  は  $\Omega_F$  の節点温度ベクトル、  $[K]$  は熱伝導マトリックス、  $\{Q\}$  は熱流束ベクトルである。

式(6)の時間に関して Crank-Nicolson 法を用いて離散化すると ( $\Delta t = t_2 - t_1$ ),

$$\left( \frac{1}{2} [k] + \frac{1}{\Delta t} [c] \right) \{\phi_{(t_2)}\} = \left( -\frac{1}{2} [k] + \frac{1}{\Delta t} [c] \right) \{\phi_{(t_1)}\} + \{Q\} \quad (7)$$

となり、最終的には次のように表現することができる。

$$\begin{Bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_F \\ \phi_{FB} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_F \\ \phi_{FB} \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} Q_F \\ Q_{FB} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

一方, BE 領域  $\Omega_B$  に対しては, 境界上の積分方程式が次のように得られる.

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega} \left( k_T \phi^* + \rho c \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi d\Omega dt - \left[ \int_{\Omega} \rho c \phi \phi^* d\Omega \right]_{t=0}^\tau \\ & = \int_0^\tau \int_{\Gamma} (\phi^* q + q^* \phi) d\Gamma dt \end{aligned} \quad (9)$$

ここに,  $\phi^*$ ,  $q^*$  はそれぞれ対応する基本解であり, 2次元の場合

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi\lambda(\tau-t)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4\lambda(\tau-t)}\right] \quad (10)$$

$$q^* = \frac{rk}{8\pi\lambda^2(\tau-t)^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4\lambda(\tau-t)}\right] \quad (11)$$

で与えられる. また,  $r$  は特異点と影響点の間の距離であり,  $\lambda = k/\rho c$  である.

この基本解を式(9)に代入し, 時間増分  $dt = t_2 - t_1$  に対して  $\phi$  と  $q$  が一定であると仮定すると, 点  $i$  に関して

$$\begin{aligned} & c_i \phi_i - \frac{\lambda}{k} \int_{\Gamma} q \int_{t_1}^{t_2} \phi^* dt d\Gamma \\ & = \frac{\lambda}{k} \int_{\Gamma} \phi \int_{t_1}^{t_2} q^* dt d\Gamma + \left[ \int_{\Omega} \phi \phi^* d\Omega \right]_{t=t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (12)$$

を得る. ここで, 基本解  $\phi^*$  と  $q^*$  の時間積分は

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi^* dt = \frac{1}{4\pi\lambda} E_i(a) \quad (13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} q^* dt = \frac{k}{2\pi\lambda r} \frac{r\partial}{\partial n} e^{-a} \quad (14)$$

となる. ただし,

$$a = \frac{r^2}{4\lambda(t_2-t_1)} \quad (15)$$

であり,  $E_i$  は積分指数関数であり次式で与えられる.

$$\begin{aligned} E_i(x) &= \int \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= -E_c - \ln[a] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n \cdot n!} \end{aligned} \quad (16)$$

また  $E_c$  は, Euler 数 ( $E_c = 0.5772156$ ) である.

境界を  $m$  個の要素に分割し、離散化すれば、式(9)に対する境界要素方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} c_i \phi_i - \frac{1}{4\pi k} \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} E_{i(a)} [N] q \, d\Gamma \, d\Omega \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} e^{-a} [N] \phi \, d\Gamma + \left[ \int_{\Omega} \phi \frac{e^{-a}}{4\pi\lambda(t_2-t_1)} \, d\Omega \right]_{t=t_1} \end{aligned} \quad (17)$$

上式をマトリックス表示して

$$[H] \{\phi\}_2 = [G] \{q\} + \{b\} \quad (18)$$

を得る。  $Q$  と  $q$  は分布マトリックス

$$[M] = \int [N]^T [N] \, d\Gamma \quad (19)$$

を用いて、次のように関係付けることができるので

$$[Q] = [M] \{q\} \quad (20)$$

式(18)は、次のように有限要素方程式として表現することができる。

$$\begin{aligned} [M][G]^{-1} \{\phi\}_2 &= \{Q\} + [M][G]^{-1} \{b\} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{BF} \\ \phi_B \end{Bmatrix}_2 &= \begin{Bmatrix} Q_{BF} \\ Q_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{BF} \\ B_B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

よって、内部境界条件  $\Gamma_I$  における連続条件

$$\phi_{FB} = \phi_{BF}, \quad Q_{FB} + Q_{BF} = 0 \quad (22)$$

を考慮し、式(8)と式(21)を重ね合わせることによって、全体系の方程式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} + b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_F \\ \phi_{FB} \\ \phi_B \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_F \\ u_{FB} \\ u_B \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_F \\ u_{FB} \end{Bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_F \\ \phi_{FB} \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} Q_F \\ B_{BF} \end{Bmatrix} \\ \{u_B\}_1 &= \{Q_B + B_B\} \end{aligned} \quad (24)$$

### 3. 凍結管における熱伝導率

通常使用される地盤凍結のための凍結管は、直径が10cm内外の金属性でその二重管中を凍結液が往復する構造のものが多い。このため本解析では、凍結管により地盤が不連続となる箇所を Fractured masses とみなし、Garting/Thomas により提案されたクラック要素を用いて離散化している。

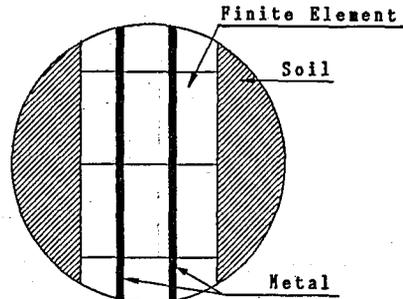


Fig. 1 Freezig Pipe

### 4. 未凍結土中の間隙水移動方程式

飽和状態の土を、吸排水が自由な条件下、いわゆる完全解放状態で凍結する場合、凍結膨張率  $\xi$ 、吸排水率  $\xi_w$  と凍結面に作用する有効拘束圧  $\sigma$ 、及び凍結速度  $u$  の間には次のような関係がある。

$$\xi = \xi_0 + \frac{\sigma_0}{\sigma} \left( 1 + \sqrt{\frac{u_0}{u}} \right) \quad (25)$$

ここで、 $\xi_0$ 、 $\sigma_0$ 、 $u_0$  は土固有の定数である。ここで凍結膨張は熱流方向のみに進行し、また、フリージング・フロントの各節点と一致するものと仮定する。

凍結膨張率  $\xi_i$  を、フリージング・フロントの法線方向のひずみ  $\epsilon$  とすると、凍結土圧は次のようになる。

$$\{\sigma_{r\theta}\} = [D] \{\epsilon_{r\theta}\} \quad (26)$$

ここに  $[D]$  は地盤性状に関する応力マトリックスであり、この  $\{\sigma_{r\theta}\}$  をフリージング・フロントに作用させ応力解析すれば、凍結現象が数値解析できることになる。

### 5. 数値解析例

Fig. 2 に示すモデルは、シールド工法等において、開掘前面が軟弱地盤層に遭遇した場

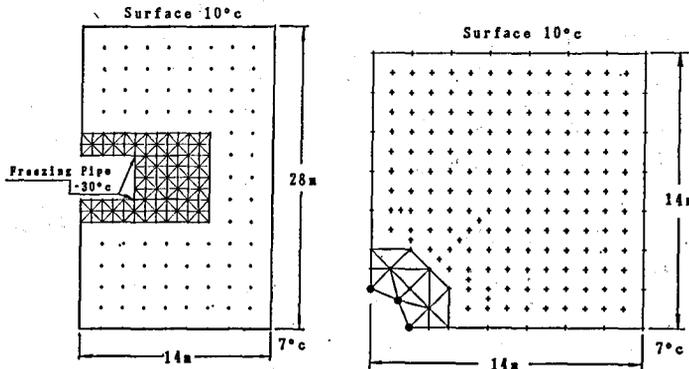


Fig. 2 Mesh Division

Table. 1 Material Propaties of soil

ANALYSIS OF HEAT CONDITION				
	HEAT CONDUCTIVITY [kcal/mhr <sup>o</sup> c]	SPECIFIC HEAT [kcal/kg <sup>o</sup> c]	UNIT WEIGHT [kg/m <sup>3</sup> ]	HEAT CAPACITY [kcal/m <sup>3</sup> o
FROZEN	2.3443	0.3275	1631	534.2
UNFROZEN	1.2783	0.4285	1698	726.7
STRESS ANALYSTS				
	YONG'S MODULUS		POISSON'S RATIO	
FROZEN	2100.0 [kg/cm <sup>2</sup> ]		0.3	
UNFROZEN	40.0 [kg/cm <sup>2</sup> ]		0.3	

合を想定し、その縦断面、横断面を FE-BE Coupling 手法により離散化したものである。ただし、横断面に関しては、対称性を考慮してその 1/4 を離散化している。軟弱地層中に凍結管を注入し、周囲を凍結させる。図中の凍結管は  $-30^{\circ}\text{C}$  であり、これをさきに述べたクラック要素 4 個で評価している。形状寸法は、図中に示す通りであり、境界条件は、地表面で  $10^{\circ}\text{C}$ 、地盤内を  $7^{\circ}\text{C}$  とし、また初期温度は全節点  $7^{\circ}\text{C}$  と設定している。なお、非定常熱伝導解析、応力解析時の物理定数を Table. 1 に示す。

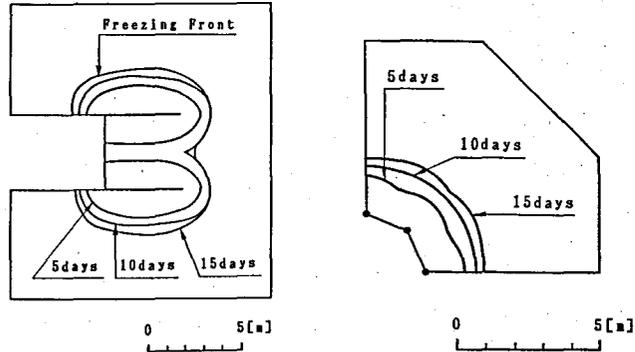


Fig. 3 Freezing Fronts

Fig. 3 は凍結開始後 5, 10, 15 日経過後の凍結領域を示したものである。横断面において、15 日経過後掘削面の周囲 2 m が凍結しており、また、縦断面において、10 日経過後には掘削面の進行方向全面が凍結している。

Fig. 4 は、縦断面図の凍結領域の拡大より算定した凍上量を示したものである。地下 14 m に凍結管を設置しているため、凍結膨張の影響も小さく、したがって地表面での凍上量はほぼ均一に約 10 cm となっている。

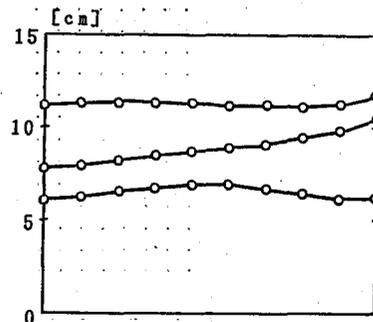


Fig. 4 Heavig of Earth

## 6. ま と め

本研究は、境界一有限要素の結合手法を用いて効率よく地盤凍結問題を取り扱うことを目的としている。本法では、地盤凍結のための凍結管をクラック要素により離散化しているため、地盤の不連続性が考慮可能となっている。また、凍結領域が拡大するところでは間隙水の移動、物性値等が複雑に数値解析に影響を及ぼすため有限要素で、他の均一地盤を境界要素で離散化しているため非定常熱伝導解析の精度も高く、これに付随する凍結膨張率及び凍上量も高精度で得られたものと考えられる。さらに、対象とする問題の性質上離散化領域が大きくなるが、境界要素の導入により計算機使用上においても経済的な解析といえる。

## 参 考 文 献

- 1) 高志 勤：凍結膨張による未凍結領域内の土圧と変位の経時的変化，土木学会論文報告集
- 2) D.K. Galting and R.K. Tohmas: A Statical Based Numerical Model for Heat Conduction in Fracture Rock Masses, Int. Jour. Num. Anal. Geomechanics, vol. 8, 1984.
- 3) 遠藤典男：境界一有限要素を用いた凍結地盤の応力解析，信州大学修士論文，平成元年