

高専における「線形代数」の理解度の分析*

中 沢 喜 昌**

The Analysis of the Grade of the Students' Understanding
in "Linear Algebra" in National College of Technology

Yoshimasa NAKAZAWA

We gave linear algebra lessons to the fifth grade students as an elective subject and analyzed that to what extent students understood the linear algebra, judging from the result of questionnaires and tests.

It showed that they are good at the problems accompanied by calculations such as inverse matrix, simultaneous linear equation, and proper value problem and that, on the contrary, it is difficult to understand the abstract notion like linear space and linear map.

1. 研究の動機とねらい

現代の高等数学では、解析学としての微積分と線形代数が数学の基礎としての2本の柱になっている。大学では教養部においてほとんどのところで扱われている。それに比べて、高専では微積分関係は相当扱われているが代数関係は少ない。

最初の頃は大学と同じ位に行列を扱っていたが、52年の教育課程の改訂で数学の時間数が減ってから代数・幾何関係の減少が目だつようになってきた。

高専における線形代数としては2年次に代数・幾何の中に行列と行列式が含まれている。その取扱は最近特に少なくなり、高校並に簡単になってしまっている。実際、行列とはこういうもの、程度で終わりになっている。全般に高専の数学のテキストがレベルダウンの方向にある。行列の部分に関しては、行列の階数や連立1次方程式の解に関する性質がないし、固有値や2次形式がなくなっているものもある。

コンピューター時代の数学としては線形代数は大事であると考え、大部分の高専では代数関係は2年で終わりなので、程度は下げても線形代数としてある程度まとまった形のあるものにしたいと思っていた。

5年生の選択で数学特論(後期2単位)の授業を担当することになり、その内容として高

* 平成元年8月2日 第71回日数教千葉大会にて発表

** 一般科 助教授

原稿受付 平成元年9月29日

専の数学で不足している線形代数を昨年度後期に行い、2年次の不足を補うことを主な目的とした。選択ということで対象の集団は数も少なく、数学が比較的できる方の特殊な集団ではあるが、テストやアンケートなどから線形代数に関する理解度の分析を試みた。

2. 研究の内容

2-1 指導の内容

線形代数の項目を(1)~(6)とおおまかに分けて指導の概要を示す。ただし、[]内は指導した時間数、()内はその内容である。

なお時間数の配分については、一年分の内容を後期のみで教えるので、2年での既習事項を省略してもかなり無理があるのはしかたがない。

(1) 行列：[3時間]

(行列の定義、行列の演算法則と分割、正則行列と逆行列)

この項目は2年次に2,3次で済ませてあるので (m, n) 形の一般の行列の説明と、行列の分割および正則行列について簡単に扱う。

(2) 行列式：[0時間]

(行列式の定義、行列式の性質、展開と逆行列、Cramerの公式)

これも2年次に3次を主体に済ませてある。行列式の定義が一般的でないが、時間の関係でこの項目はすべて省略する。

(3) 連立1次方程式：[6時間]

(線形独立と線形従属、基本行列と行列の階数、連立1次方程式と消去法、連立1次方程式の解の構造)

2年次には消去法をやっているため解の存在条件とか解空間について線形独立や階数を用いて証明する等理論的に扱う。また、演習の時間をとって実際に具体的な問題を与えて授業中に解かせる。

(4) 線形空間と線形写像：[8時間]

(線形空間の定義、基底と次元、線形写像と行列、線形空間の内積)

ここは高校と同じく2次元での1次変換をやっている。しかし、あまりよく理解しているようではないのでほとんど初めてと同じである。本来ならばこの項目を重点的に講義すべきであるが時間の関係もあり詳しくは扱わない。ただ、新しい概念なので定義および例を主体に一通り全部を駆け足で一方向的に講義する。

(5) 固有値問題：[9時間]

(固有値と固有ベクトル、行列の対角化、実対称行列、2次曲面の標準形、2次形式)

この項目は工科系にとっては線形代数の中でも重要な項目であると考えられる。2次の行列の固有値、固有ベクトルの幾何学的な説明から入り、代数的な定義に入って行く。演習時間をとり、3次の行列の固有値と固有ベクトルを計算させ、対角化可能なものはそれを求めさせる。固有方程式がいろいろな解をもつもので練習させて、特に重解の場合には対角化が可能か可能でないかに注意させる。一般に固有値、固有ベクトルには抵抗があるが、沢山扱って慣れさせる方針をとる。

(6) Jordan の標準形 : [3 時間]

(Cayly-Hamilton の定理, Jordan の標準形)

ここは相当な時間をかけなければ証明とか理解までには至らない部分である。理論的には扱わず2次または3次の例を与えて説明するのみとする。

以上のような授業展開をした後の結果をまとめた。

2-2 理解度の分析

2-2-1 テスト結果の考察

定期テストの2週間前の授業時間に下記のテストを60分で行った。以下に問題を示す。

問題1 次の(1), (2)の小問に答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ は正則かどうか調べよ。(逆行列が存在するか)

(2) 3つのベクトル $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

の組は線形独立であるか線形従属であるか調べよ。

問題2 次の(1), (2)に答えよ。

(1) $R^3 \rightarrow R^3$ の2つの直交変換 $y = Vx$, $z = Uy$ があるとき $z = UVx$ は直交変換であることを示せ。

(2) 2つの線形写像 f , g の標準基底に関する行列がそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ であるとき}$$

行列 BA は何次元から何次元への線形写像を表すか。また、 AB についてはどうか。

問題3 次式が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \end{vmatrix} = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

問題4

$$\text{連立1次方程式} \begin{cases} x & -2z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \\ -3x + 2y + 9z = -10 \\ x + 4y + 4z = 1 \end{cases} \text{ について}$$

(1) 解をもつかどうかを階数を用いて調べよ。

(2) 解がある場合は解け。

問題5

$$\text{行列 } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2次形式 $Q = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ のとき

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ.
- (2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対する大きさ1の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.
- (3) Q を $'xAx$ の形に表せ. また, $P = (p_1 p_2 p_3)$ とするとき直交変換 $x = Py$ により2次曲面 $Q = 8$ の標準形の式を求め, その名称をいえ.

以上の問題についての得点分布を示す. 受験者は5年生18人で度数は%で示す.

得点	20~	30~	40~	50~	60~	70~	80~	90~	計	平均	標準偏差
度数	5%	11	0	17	11	17	28	11	100	67.5	20.9

問題は計算がほとんどの簡単なものであったが, 特別できの悪い学生がいた. これはテストを実施した頃が卒研の発表会の準備で追われていたせいもあり, あまり勉強しなかったのと, 計算間違いの多かったせいようである.

次に各問の正答率(中間点や減点を含む得点の割合)を示す. 配点は各問すべて10点とする.

問 題	1(1)	1(2)	2(1)	2(2)	3	4(1)	4(2)	5(1)	5(2)	5(3)
正 答 率	98%	53	22	50	90	70	72	98	85	38

これを各問題について個別に見ていく.

問題1(1)の正則性, すなわち逆行列に関するものは良くできた. 逆行列は2年でやってあるせいもあると思われる.

1(2)の線形独立と線形従属に関する問題はあまり良くない. 定義が頭に入っていないくて証明の方針がたっていないものと, 最後の判定が逆のものが半々である.

問題2の写像に関する証明とか次元のように, 最初から行列が与えられていない問題は簡単なものでも出来がよくない.

2(1)は易しくしたつもりで $R^3 \rightarrow R^3$ という条件をつけたので, かえって一般の3次の行列を使って失敗していた. また, 直交変換そのものの理解不足のせいもある.

2(2)のような常識的なことが頭に入っていないのは意外であった. 後半のABが計算できないので解答に困って無答が多かったと考えられる.

問題3の行列式の計算は今回は全然ふれなかった割には良くできた. 行列式は2年次でやってあり, ほとんどの学生は2年の数学の成績が良いせいである.

問題4の連立1次方程式に関するものも具体性があるので比較的できは良い. ただ, (2)が違っていたものは全員(1)の計算違いのためであった.

問題5(1)の固有値の計算等のように具体的な計算は非常に正確にできる.

5(2)の間違いは計算違いがほとんどであり分かってはいるようである.

5(3)はいろいろな内容を含んでいるので出来は良くなかった. また, 2次曲面の名称など

も2年次におけるテキストの扱いが簡単になってしまったせいか忘れていたものの方が多いのが気になった。

2-2-2 大学生との比較

ちょうど同じ頃、筆者が某国立大学工学部の2年生に行ったテストに計算問題の部分に一部同じ問題を出した。その結果を参考までに比較してみる。

問 題	3	4(1)	4(2)	5(1)	5(2)	5(3)	人数	時間	問題数
大 学	72.2%	60.6		91.2	73.3	28.4	257人	90分	6題
高 専	90.0%	70.0	72.2	97.8	85.0	37.8	18人	60分	5題

ただし、大学生は選択ではあるがほとんどの学生がとっている。高専生は5年生で歳は同じだが、2年次の数学の成績は優11人、良5人、可2人でその平均点は80.4点（全体の平均点68.9点）の高専としては数学ができる方の一部の学生である。

このように対象学生の違い、テスト問題、使用テキスト^{2),3)}、講義内容や形態が同じではないので単純な比較は問題があるが、上記の表にあるような計算問題に関してはこの集団の高専生は平均的な大学生よりできると言える。

2-2-3 アンケート結果の考察

下記のようなアンケートをテスト後の最後の授業のときに行った。

質問1. 数学特論を選択した理由を書いて下さい。

質問2. 各項目の理解度を記入して下さい。（理解できたは○、理解できないは×、どちらともいえないは△を入れよ。）

- (1) 線形空間（定義、線形独立と従属、基底と次元、線形写像と行列）
- (2) 行列（定義、演算法則と分割、逆行列、階数、連立1次方程式の消去法と解の構造、正則行列と逆行列の計算）
- (3) 行列式
- (4) 線形写像と内積空間（線形写像と表現行列、内積空間、直行変換）
- (5) 固有値問題（固有値と固有ベクトル、行列の対角化、実対称行列、実2次形式、2次曲面の標準化）
- (6) 特論（ハミルトン・ケーリーの定理、ジョルダンの定理）

質問3. 数学の好き、嫌い、普通を入れて下さい。

（……略……）

質問4. 高専の数学・応数の内容の理解度、興味等の中から一つずつ○をつけて下さい。

（……略……）

質問5. 数学特論（線形代数）を学んでの感想を記入して下さい。

質問6. 高専の数学・応数の授業について感想を記入して下さい。

以上のアンケートの結果を順に見ていく。

まず、質問1.については「大学へ進学するの役に立つと思ったから」が一番多くて半数があげている。「数学が好き、または得意だから」が二番目に多い。その他は、「数学が苦

手なので、「選択の中で一番役に立ちそうだったから」、「専門で必要性を感じたから」等が複数あった。

質問2.については細かい項目については省略して大きい項目のまとめを示す。表中の数字はパーセントを示す。以下同じ。

項 目	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
○	39%	78	67	11	61	11
△	33	22	33	56	33	39
×	28	0	0	33	6	50

これから見るに行列と行列式および固有値問題はほとんど理解した。

反対に線形空間および線形写像と内積空間は理解出来なかった学生がかなり多い。これは予想されたことではある。ここは大学でも部分空間や基底と次元の問題を出しても出来が悪いところである。

特に、最後の特論としたところは半数が理解しなかった。ここはきちんとやれば相当時間もかかるし難しいところだが、時間がなかったので急いで例を上げて説明した程度で終わりにしたせいでもある。

実は、最初の子定では連立1次方程式と固有値問題とジョルダンの標準形のみを詳しく扱う予定であったが、集まった学生がほとんど大学へ編入するので一通り線形代数の全範囲を講義することにした。そのため各項目に十分な時間を当てることが出来なかった。

質問3.については下表のようである。

学 年	中 学	高専1年	2 年	3 年	4 年	5 年
好 き	67%	61	56	33	33	33
普 通	5	17	33	50	28	45
嫌 い	28	22	11	17	39	22

これによると3年で好きが普通になり4年で嫌いになる者が出てくる。やはり、4年の応数が難しいようである。受講生の集団は数学が好きな者の集まりかと思ったが必ずしもそうとは限らなかった。

質問4.については 略。

質問5.については主なものを以下に記す。

- ・固有値計算のような一つの型になっている計算は比較的簡単だが、概念的な定義だとか証明が理解し難かった。
- ・行列に関するものは2年の時にやったので比較的分かりやすかった。線形空間や線形写像などがよく理解できなかった。
- ・線形という考え方が理解できたことは良かった。実際の応用への使い方等について知りたいと思った。(コンピューターによる行列計算等を簡単に、また線形変換を用いたグラフィック関係など。)
- ・計算方法は分かったが概念的なものがよく分からない。どのような分野でどのように使え

るかがはっきりすればもっと学び易かった。

・黒板に詳しく書いてもらえたのが良かった。いま、専門の教科で行列を使って役に立った。

・授業はノートをとるのに忙しかった。内容も具体的でないので分かりにくかった。ただ、たまにやる演習は理解しやすかったので演習を増やしてもらえれば良かった。

・大学受験のときに線形代数の勉強をしたので授業は復習のような形になった。編入学受験生のために線形代数は前期にやって欲しい。

質問6.については 略。

3. ま と め

テスト結果やアンケートの集計から見ると、高専生は逆行列や連立1次方程式とか固有値の計算のように計算を伴うものは得意である。線形空間や線形写像のように概念的なものがやはり分かりにくいことが分かった。感想にも「計算方法はよく分かったが概念的なものがよく分からない」が多く、テスト結果にもその通りに現れている。

線形空間の定義から始めて部分空間、線形独立、基底、次元、階数、……等の新しい概念に対する抵抗感がある。また、これらを使っての行列の対角化までの一貫した理論の積み上げに、ついて来るのが大変なようであった。

また、具体的な応用例を望んでいる学生も多かった。これは高専に限らず工科系の学生全般に言えることではある。これが何に使えるか、または使えそうかと考えるようである。もちろん理論的な体系は教えなければいけないが、応用例を示せるものについては一言触れることが工科系の数学の授業としては大事であると分かった。

2年での既習事項の定着率が良いことや、計算力は大学生に劣らないということが分かった。これらから考えて最初の目標であった高専生への線形代数は Jordan の標準形までは無理としても、抽象理論に終わることなく深入りしなければ計算を通して固有値問題までは2年生でもできると思われる。

4. 今 後 の 課 題

今回は上級生ということで少し数学的に一般論を教え過ぎた部分があった。やはり、高専生には具体的な2, 3次の例から徐々に一般論へ入って行く必要性を感じた。ここいらあたりが高専生への授業の課題ではないか。

線形写像などはパソコン等により2, 3次元のグラフィックスでイメージを十分につけてから一般論へと発展させて行くのが頭の中へ残せるよい教え方の一つであると思われる。現在は、高校と同じ2次元の平面上での1次変換のみだが、高専にはパソコンがあるので3次元まで扱いたい。

行列については3次の行列を主に扱うのは良いが、 (m, n) 型行列を入れるなどテキストにもう少し一般性があってもいいし、高専では2年で一応完了することを考えて固有値問題なども3次のものまで教えられればよい。

少し例がある⁴⁾が、2年次でも使えるような高専向きの計算を主体にした、ある程度まとまった線形代数のテキストが作れればと思っている。

参 考 文 献

- 1) 藤原重幸：線形代数の数学教育的意義について，長野高専紀要第8号
- 2) 青木，大野，川口：線形代数要論，培風館
- 3) 佐久間，富永他：線形代数教科書，共立出版
- 4) 岡本昭三：線形の数学，高知高専