

最適公共投資配分の統計的制御の適用性*

柳沢 吉保**・奥谷 巖***

1. ま え が き

公共投資は国家、あるいは地方公共団体にとって、社会資本の充実・整備、経済成長等の目的を達成するための重要な手段である。公共投資による社会環境・教育環境の整備は、生活基盤の育成資本として重要であり、また、道路、港湾等の施設は、その整備に巨額の投資を要し、かつその効用は広汎多岐に、長期間にわたって発揮されるため、長期的な見通しにたった周到な計画のもとになされる必要がある。計画の立案にあたっては、計量経済モデルを用いた公共投資等による経済効果の計測を行なう。計量経済モデルとは、多数の経済変数間の関係を方程式で表わしたものである。従来、日本では、経済企画庁の経済審議会企画部内に設けられた計量小委員会が日本経済の計量経済モデルを作成し、それを用いて目標変数が政府の意図する数値となるよう、公共投資量等の政策変数を試行錯誤的に動かし、実現するであろうと思われる将来の国経済の予測を行ない、それを企画部会の政策小委員会や他の分科会の審議の資料としている。しかし、望ましい目標変数を実現させるための最適な政策変数を見いだすためには、非常に多くの試行錯誤を繰り返すことになり、また信頼性の点でも問題がある。そこで本研究では、これらの問題点を解消するための公共投資の最適化問題の定式化を行なう。

2. 計量経済モデルを導入した動的システムモデルの定式化

本研究においては実用性を考慮し、分析で扱われる統計量が年単位で集計されることから、時間を離散時間とし、対象とする地域の経済システムを、情報制限最尤法、2段階最小2乗法、逐次最小2乗法等により作成された統計的な計量経済モデルで表わすことを考える。

いま、 t 期における内生変数を $X(t)$ 、投資量を表わす政策変数を $Y(t)$ 、外生変数を $V(t)$ とすると、線形の計量経済モデルは、

$$X(t) = A_1 X(t) + \sum_{m=1}^M A_2(m) X(t-m) + \sum_{m=1}^M B_1(m) Y(t-m) + \sum_{m=0}^M C_1(m) V(t-m) + D' \quad (1)$$

のような一般式で表わすことができる。ここで、 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 、 $V(t)$ はそれぞれ n_1 、 n_2 、 n_3 次元ベクトルとしたとき、 A_1 、 $A_2(m)$ は $n_1 \times n_1$ 、 $B_1(m)$ は $n_1 \times n_2$ 、 $C_1(m)$ は $n_1 \times n_3$ のパラメータ行列であり、 D' は n_1 次元の定数ベクトルである。また、 M はモデル中に含まれる最大の時間遅れである。ここで該当しない時間遅れをもつ変数にかかるパラメータの値は

* 昭和60年3月土木学会中部支部講演発表会にて発表

** 土木工学科 助手

*** 信州大学工学部土木工学科 助教授

原稿受付 昭和61年9月30日

0 とおけばよい。

さて、式(1)をもとに誘導型の方程式を導くと、

$$X(t) = \sum_{m=1}^M A(m)X(t-m) + \sum_{m=1}^M B(m)Y(t-m) + \sum_{m=0}^M C(m)V(t-m) + D \quad (2)$$

となる。I は $n_1 \times n_1$ の単位行列とすると

$$A(m) = [I - A_1]^{-1} A_2(m), \quad B(m) = [I - A_1]^{-1} B_1(m)$$

$$C(m) = [I - A_1]^{-1} C_1(m), \quad D = [I - A_1]^{-1} D'$$

である。さらに(2)式について、 $m=i+1$ とおくと

$$\begin{aligned} X(t) = & \sum_{i=1}^{M-1} A(i+1)X(t-i-1) + A(1)X(t-1) + \sum_{i=1}^{M-1} B(i+1)Y(t-i-1) + B(1)Y(t-1) \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} C(i+1)V(t-i-1) + C(1)V(t-1) + C(0)V(t) + D \end{aligned} \quad (3)$$

となる。さらに

$$X_1(t-1) = \sum_{i=1}^{M-1} A(i+1)X(t-i-1) + \sum_{i=1}^{M-1} B(i+1)Y(t-i-1) + \sum_{i=1}^{M-1} C(i+1)V(t-i-1) \quad (4)$$

とおくと、式(3)は

$$X(t) = X_1(t-1) + A(1)X(t-1) + B(1)Y(t-1) + C(1)V(t-1) + C(0)V(t) + D \quad (5)$$

と表わせる。 $(t+1)$ 期についても同様に考えると

$$X(t+1) = X_1(t) + A(1)X(t) + B(1)Y(t) + C(1)V(t) + C(0)V(t+1) + D \quad (6)$$

となる。ここで $X_1(t)$ について考える。式(4)について $t=t+1$ とし、 $i=j+1$ とおくと

$$\begin{aligned} X_1(t) = & \sum_{j=1}^{M-2} A(2+j)X(t-j-1) + A(2)X(t-1) + \sum_{j=1}^{M-2} B(2+j)Y(t-j-1) + B(2)Y(t-1) \\ & + \sum_{j=1}^{M-2} C(2+j)V(t-j-1) + C(2)V(t-1) \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここで

$$X_2(t-1) = \sum_{j=1}^{M-2} A(2+j)X(t-j-1) + \sum_{j=1}^{M-2} B(2+j)Y(t-j-1) + \sum_{j=1}^{M-2} C(2+j)V(t-j-1) \quad (8)$$

とおくと

$$X(t) = X_2(t-1) + A(2)X(t-1) + B(2)Y(t-1) + C(2)V(t-1) \quad (9)$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} X_k(t) = & X_{k+1}(t-1) + A(k+1)X(t-1) + B(k+1)Y(t-1) + C(k+1)V(t-1) \\ & (k=1, 2, \dots, M-2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$X_{M-1}(t) = A(M)X(t-1) + B(M)Y(t-1) + C(M)V(t-1) \quad (11)$$

ここで新たに得られたデータ $X(t)$ を $X_0(t)=X(t)$ とおくと

$$X_0(t)=X_1(t-1)+A(1)X(t-1)+B(1)Y(t-1)+C(1)V(t-1)+C(0)V(t)+D \quad (12)$$

式 (10), (11), (12) より

$$x_t = \Psi x_{t-1} + \Gamma u_{t-1} + \Phi v_{t-1} + d \quad (13)$$

と表わせる。ここで $x_t, u_t, v_t, \Psi, \Gamma, \Phi, d$ については、

$$\begin{array}{ccc}
 x_t = n_1 \downarrow \begin{array}{c} \overset{1}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c} X_0(t) \\ X_1(t) \\ \vdots \\ X_{M-1}(t) \end{array} \right) \\ \uparrow \\ n_1 \times M = n \end{array} & u_t = n_2 \downarrow \overset{1}{\leftrightarrow} Y_t & v_t = n_3 \downarrow \begin{array}{c} \overset{1}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c} V(t) \\ V(t-1) \end{array} \right) \\ \uparrow \\ n_3' \\ 2n_3 = n_3' \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi = n_1 \downarrow \begin{array}{c} \overset{n_1}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{ccc} A(1) & I & 0 \dots 0 \\ A(2) & 0 & I \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A(M-1) & 0 & 0 \dots I \\ A(M) & 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right) \end{array} & \Gamma = n_1 \downarrow \begin{array}{c} \overset{n_2}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(M-1) \\ B(M) \end{array} \right) \end{array} & \Phi = n_1 \downarrow \begin{array}{c} \overset{n_3}{\leftrightarrow} \quad \overset{n_3}{\leftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{cc} C(0) & C(1) \\ 0 & C(2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C(M-1) \\ 0 & C(M) \end{array} \right) \end{array} & d = n_1 \downarrow \overset{1}{\leftrightarrow} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

となる。(13)式を用いて、公共投資の最適化問題の定式化を行なう。

3. 動的計画法を用いた最適制御政策

本研究における目的は、 $t=1, 2, \dots, N$ なる N 期にわたって、ある評価基準を最適にするような u_t を求めることである。いまその評価基準を J_N としたとき、

$$J_N = \sum_{t=1}^N a_t x_t \quad (14)$$

のような状態量の線形の式で表わす。 a_t は政策によって与えられるものであり、経済システム内の最大化したい変量、例えば、生産所得、個人所得、歳入、税金等に対する重みベクトルである。ここでは、式 (16) を最大にする u_0, u_1, \dots, u_{N-1} を、線形制約条件

$$H_t(x_t, u_t) \leq 0 \quad (t=0, 1, \dots, N-1) \quad (15)$$

の下で求めることを考える。この制約条件は、 x_t あるいは u_t に上限値、下限値が設定されている場合も含んでいる。

式(16)のように、与えられた期間内において最適化を行なう場合の最適化手法として、ここでは動的計画法を用いる。式(16)を変形して

$$J_N = a_N x_N + \sum_{t=1}^{N-1} a_t x_t = a_N (\Psi x_{N-1} + \Gamma u_{N-1} + \Phi v_{N-1} + d) + J_{N-1} \quad (16)$$

として、まず最後の期間についての最大化を行なう。

式(18)より、制御されるのは、つまり最大化されるのは右辺第2項だけであるから、次の線形計画問題を解くことになる。

$$\text{目的関数： } a_N \Gamma u_{N-1} \longrightarrow \text{maximize} \quad (17)$$

$$\text{制約条件： } \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M u_j^i(N-1) \leq \alpha(N-1) x^i(N-1) \quad (18)$$

$$\lambda_j^i(N-1) \leq u_j^i(N-1) \leq \mu_j^i(N-1) \quad (19)$$

ここで、 i は投資量の種類、 j はゾーン数である。式(18)は投資量の合計に対する制約であり、 $\alpha(N-1)$ は $N-1$ 期における全公共投資量の $x^i(N-1)$ (例えば地方公共団体の歳入量)に対する割合である。式(19)はそれぞれの投資量の上下限值である。

t 期におけるそれぞれの公共投資量が全公共投資量において占める割合ベクトルを η_t とすると、政策変数ベクトル u_t は次のように表わされる。

$$u_t = \alpha(t) x^i(t) \eta_t = F_t x_t \eta_t \quad (20)$$

このように政策変数がおかれると、式(16)～(18)の線形計画問題は次のような問題に変換される。

$$\text{目的関数： } a_N \Gamma \eta_{N-1} \longrightarrow \text{maximize}$$

$$\text{制約条件： } \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M \eta_j^i(N-1) \leq 1 \quad (21)$$

$$L_j^i(N-1) \leq \eta_j^i(N-1) \leq U_j^i(N-1) \quad (22)$$

ここに $L_j^i(N-1)$ 、 $U_j^i(N-1)$ は $\eta_j^i(N-1)$ の上下限值である。

$N-1$ 期の最適解を η_{N-1}^* として次に最後から2つの期間についての最適化を行なう。式(13)、(16)、(20)を用い、

$$\begin{aligned} J_N &= a_N x_N + a_N x_{N-1} + J_{N-1} \\ &= \{a_{N-1} + a_N(\Psi + \Gamma \eta_{N-1}^* F_{N-1})\} \Psi x_{N-2} + \{a_{N-1} + a_N(\Psi + \Gamma \eta_{N-1}^* F_{N-1})\} \Gamma u_{N-2} \\ &\quad + \{a_{N-1} + a_N(\Psi + \Gamma \eta_{N-1}^* F_{N-1})\} (\Phi v_{N-2} + d) + a_N (\Phi v_{N-1} + d) + J_{N-2} \end{aligned} \quad (23)$$

となり、(23)式より最大化されるのは、右辺第2項であるので、次の線形計画問題を解くことになる。

$$\text{目的関数： } \bar{a}_{N-1} \Gamma \eta_{N-2} \longrightarrow \text{maximize} \quad (24)$$

$$\text{制約条件： } \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M \eta_j^i(N-2) \leq 1 \quad (25)$$

$$L_j^i(N-2) \leq \eta_j^i(N-2) \leq U_j^i(N-2) \quad (26)$$

ここに $\bar{a}_{N-1} = a_{N-1} + \bar{a}_N(\Psi + \Gamma \eta_{N-1}^* F_{N-1})$

同様の操作を行なうことにより、任意の第 k 期については、次の線形計画問題を解くことによって投資割合 η_k^* を求めることができる。

目的関数： $\bar{a}_{k+1} \Gamma \eta_k \longrightarrow \text{maximize}$ (27)

制約条件： $\sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M \eta_j^i(k) \leq 1$ (28)

$L_j^i(k) \leq \eta_j^i(k) \leq U_j^i(k)$ (29)

ここに、 $\bar{a}_{k+1} = a_{k+1} + \bar{a}_{k+2}(\Psi + \Gamma \eta_{k+1}^* F_{k+1})$ ($k=0, 1, \dots, N-2$)
 $\bar{a}_N = a_N, \quad u_k^* = F_k x_k \eta_k^*$

このように、評価基準が式(14)のように線形で、しかも、(28)、(29)式のような線形制約条件の下で、式(13)の経済システムモデルを用いて最適化を行なう場合、試行錯誤を行なうことなく容易に最適解を得ることができ、大規模なモデルにおいても適用可能である。

4. 仮想モデルを用いた計算例

ここでは、システム方程式、制約条件および、目的関数がすべて線形の場合について、仮想的な計量経済モデルを用いた数値計算例を示す。対象とする地域は5つのゾーンに分かれていて、1、2ゾーンを中心業務地区、3、4ゾーンは中心業務地区をとり囲む地区、5ゾーンを最も外側の地区として次のような変数を用いる。

- $x_j^1(t)$: t 期のゾーン j における住宅立地量
- $x_j^2(t)$: " 商業立地量
- $x_j^3(t)$: " 工業立地量
- $x_j^4(t)$: " 地価
- $x_j^5(t)$: " 道路関係の投資ストック量
- $x_j^6(t)$: " 鉄道関係の投資ストック量
- $x^7(t)$: t 期における歳入
- $y_j^1(t)$: t 期のゾーン j における道路関係投資量
- $y_j^2(t)$: " 鉄道関係投資量

x, y はそれぞれ状態量、政策変数を示す。これらの変数を用いて作成された計量経済モデルについては、その数が膨大であるため、ここでは割愛する。目的関数については、次式のとおりである。

$$J_N = \sum_{t=1}^{10} x^7(t)$$
 (30)

本章では計画期間10年を通じて歳入を最大にするような鉄道、道路関係投資量を求める。

ここで、最適化を行なった場合とそうでない場合の比較を行なうため、

- ケース1：最適制御を行なった場合
- ケース2：すべての投資割合を均等にした場合
- ケース3：ゾーン1、2における投資割合を大きくした場合
- ケース4：道路関係の投資割合を大きくした場合
- ケース5：鉄道関係の投資割合を大きくした場合

として計算を行なった。その際の投資割合については表一1に示してある。これらのデータを

表-1 投資割合

case		η_1^1	η_1^2	η_2^1	η_2^2	η_3^1	η_3^2	η_4^1	η_4^2	η_5^1	η_5^2
1	上	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
	下	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
2		0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
3		0.20	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.04	0.04	0.01	0.01
4		0.15	0.05	0.15	0.05	0.15	0.05	0.15	0.05	0.15	0.05
5		0.05	0.15	0.05	0.15	0.05	0.15	0.05	0.15	0.05	0.15

上：上限値 下：下限値

表-2 最適投資量

step	u_1^1	u_1^2	u_2^1	u_2^2	u_3^1	u_3^2	u_4^1	u_4^2	u_5^1	u_5^2
0	1.50	<u>0.10</u>	<u>0.10</u>	<u>0.10</u>	<u>0.10</u>	2.00	<u>0.10</u>	2.00	2.00	2.00
1	1.72	<u>0.11</u>	<u>0.11</u>	<u>0.11</u>	<u>0.11</u>	2.29	<u>0.11</u>	2.29	2.29	2.29
2	1.92	<u>0.13</u>	<u>0.13</u>	<u>0.13</u>	<u>0.13</u>	2.56	<u>0.13</u>	2.56	2.56	2.56
3	2.33	<u>0.16</u>	<u>0.16</u>	<u>0.16</u>	<u>0.16</u>	3.11	<u>0.16</u>	3.11	3.11	3.11
4	2.84	<u>0.19</u>	<u>0.19</u>	<u>0.19</u>	<u>0.19</u>	3.78	<u>0.19</u>	3.78	3.78	3.78
5	3.51	<u>0.23</u>	<u>0.23</u>	<u>0.23</u>	<u>0.23</u>	4.69	<u>0.23</u>	4.69	4.69	4.69
6	5.86	<u>0.29</u>	<u>0.29</u>	<u>0.29</u>	<u>0.29</u>	4.39	<u>0.29</u>	5.86	5.86	5.86
7	7.39	<u>0.37</u>	<u>0.37</u>	<u>0.37</u>	<u>0.37</u>	5.54	<u>0.37</u>	7.39	7.39	7.39
8	9.36	<u>0.47</u>	<u>0.47</u>	<u>0.47</u>	<u>0.47</u>	9.36	<u>0.47</u>	7.02	9.36	9.36
9	11.91	11.91	<u>0.60</u>	<u>0.60</u>	<u>0.60</u>	11.91	<u>0.60</u>	8.94	<u>0.60</u>	11.90

注) 〃は投資割合が上限 〘は投資割合が下限

もとに求められた各期の最適公共投資は表-2で示したとおりである。

表-2から、最適制御を行なった場合、表-1で与えられた上下限値を各投資量ごとにまちまちに配分されており、表-1のケース2から5までの投資割合とはかなり違った配分となっている。表-2の投資配分より、このような配分を行なうことは、上記の最適制御手法を用いなければ不可能と思われる。

次に実際にこの最適手法が有効かどうかを調べるため、作成した計量経済モデルを田い、ケース1からケース5までの投資割合を代入することによって、このシステムの将来の動きを予測し、目的関数を求め比較を行なう。

計量経済モデルを動かすための、状態量の初期値については表-3に示す。また、ケース1からケース5までの目的関数値については表-4に示す。

表—3 初期値

activity zone	1	2	3	4	5	6
1	150	100	150	30	15	30
2	150	50	50	30	10	28
3	150	5	50	20	3	5
4	100	5	50	15	2.5	2
5	70	5	20	10	2	0

$$x^T = 100$$

表—4 目的関数値

	CASE—1	CASE—2	CASE—3	CASE—4	CASE—5
J _N	3310	2933	2690	2944	2923

表—4から、最適制御を行なったケース1の値が最も大きく、上記の理論が有効であることがわかる。

5. ま と め

本研究においては、目的関数、システム方程式、制約条件が線形で与えられた場合の動的計画法を用いた最適公共投資問題の定式化を行ない、大規模な問題に対しても試行錯誤を行なうことなく最適値を求めることができることを示した。しかし本稿ではすべて線形式を用いており、もしそれらが非線形であったり、式(20)のように最適公共投資が状態変数によって与えられない場合には、動的計画法の計算効率は著しく低下する。この場合は、分解原理等の他の解法の検討が必要である。また、本稿では、経済諸変量の関係を乱す不確定要因を考慮せず、パラメータも確定的なものを用いたが、実際には、これらは長期間の経済諸量の変動に伴ない考えなくてはならない問題であると思われる。

第4章において、目的関数として歳入をあげたが、実際のマクロ経済モデル等の複雑なシステムにおいては目的関数の選定は非常に重要であり、また難しい問題である。このような問題は様々な分野を研究して選定しなければならないだろう。

以上のような課題は残っているものの、このような最適制御理論は、実際に応用する際にはさまざまな困難に会い、得られた結果の実行がよい成果を出すという保証はないが、我々が決定しようとする変数、現在の状態を規定する変数等が明確となり、問題解決へ導く指針となるであろう。また、今まで経験や直感により解決していた問題が、システムの規模や複雑さが増した時、経験や直感で処理しきれなくなった場合に非常に役に立つと思われる。

6. 参 考 文 献

- 1) 福地宗生「計量経済学入門」東洋経済新報社
- 2) 今川 正「地域経済論」東洋経済

- 3) 森杉寿芳, 御巫清泰「社会資本と公共投資」 技報堂出版
- 4) 山村悦夫「地域計画 (I) —計画の分析—」 技報堂出版
- 5) Etsuo YAMAMURA 「A BASIC STUDY ON THE BALANCE OF INTERREGIONAL TRADE」 PROC. OF JSCE No. 211, MARCH 1973
- 6) L.R. KLEIN 「An Essay on the Theory of Economic Prediction」 MARAKHAN PUBLISHING COMPANY CHICAGO
- 7) 尾形克彦「ダイナミック・プログラミング」 培風館
- 8) 赤池弘次, 中川東一郎「ダイナミックシステムの統計的解析と制御」 サイエンス社
- 9) 奥谷 巖「地域経済システムの動的最適化」 昭和59年3月土木学会中部支部大会
- 10) 奥谷 巖, 柳沢吉保「土地利用の統計的制御の適用性」 昭和60年中部支部大会
- 11) 朴 仁洪「土地利用の均衡分析と統計的制御」 信州大学大学院工学研究科学位論文 昭和59年
- 12) J.E. Ferandez 「Optinum Dynamic Inrestment Policies for Capucity in Trunspport Facilities」 Journal of Trunspport Economics and Policy, Vol, 17, No. 3 September 1983
- 13) Hiroyuki TAMURA 「Decentralized Optimization for Distributed-lag Model of DiIcrete System Automatica, Vol. 11, pp 593-602
- 14) CHARLOTTE STRIBEL 「Sufficient Statistics in the Optimum Control of Stochastic Systems」 JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 12, 576~592 (1965)
- 15) 藤田昌久「都市施設の長期的最適配置過程に関する研究」 土木学会論文報告集 第222号 1974年2月