複素関数論教育上の問題点*

藤　原　重　幸**

1. まえがき

複素関数論が現代数学の基礎分野であり，また物理・工学などの理論開拓にも有用であることは常識的といえる．微積分学と並んで，関数論関係の刊行物の多いことが一般の教育的関心の高いことを示す．講義の経験をふまえた平易明快な書物が著わされる傾向であるが，教育機関の中での複素関数論の実際の指導報告や教育研究は余り多くない．

関数論は，大学では教養課程外で扱われ，指導対象の質の多様化で，実践指導の条件の設定が困難のようである．高専では指導の内容が規格化され，指導対象の質や量の分布も大体一様であるので，1校の指導事例でも実態分析の参考資料にはなりうる．

高専における関数論指導は創設期より十余年にわたり，教育課程の標準に即して行われてきたが，当初の3年次指導が次第に高年次へと移され，改訂によって内容は減ることなく，時間数は減少の傾向である．ここに，教育課程の内容自体，現在の指導対象の基礎学力に似合ったものかどうかの検討がもとめられても不思議ではない．

本稿では，高専3年次指導の経歴をふまえて，次の諸点を究めたい．

① わが国での関数論教育を方向づけた著書や教科書の傾向をしらべる．

② 実践を通した関数論での理解困難な項目とその特質をさぐる．

③ 高専での関数論指導の力点や形式（分割履修など）をもとめる．

2. わが国の関数論教育の生立ち

2—1 関数論教育の先駆的著書

わが国の高等数学教育は旧制の高校・大学での講義の中に培われ，生まれた僅少の名著書によって学習者の間に広まった．複素関数論では藤原松三郎，辻正次，清水辰次郎らの著書には学術的に高度なものがあった．次の二書は教育的影響力で群をぬいていた．

① 竹内端三「函数論(上・下)」は1926年に出た．上巻は一価の一般関数論，下巻で多価，楕円関数と等角写像を説く．緒論にて実数論(デデキンド流)，点集合論から入る輓近的なかき方である．複素数，複素関数から写像を扱い1次関数を重視する．複素微積分法のタッチは実変数からの自然の延長である．微分法では等角性に，積分法では留数・実積分計算へと続ける筆致は目的意識をねらう．級数展開と解析関数の諸考察は後へまわす．演習書によって学習者に便宜を与え，今日の関数論教育のスタイルを決定した役割は大きい．かたかな文語体で版を重ね，1966年に至りひらがな口語体に改められた．

---

* 昭和54年8月　日本数学教育学会第61回総会全国数学教育大会において発表
** 一般科　数学　教授
原稿受付　　昭和54年9月29日

② 掛谷宗一「一般函数論」は1930年に出た．定理・証明といういかめしい形をさけるが基礎事項に重きをおき綿密に説明を進める．数列・級数をおさえ，一早く正則関数に入り関数列を論じて初等関数を突く，留数定義は関数の展開以前である．調和関数，解析接続にもくわしく，楕円関数，写像定理，多変数関数にもふれている．「一般」の名称は特殊関数に対してである．図版が僅少で独特な用語が目立つが，当時としては先駆的なひらがな口語体のかき方であった．適切な練習問題をちりばめ，全書版「微分学」「積分学」と合わせてセルフ・コンテンドな数学書として学習者に迎えられた．

2—2 関数論教育の普及的著書

関数論教育はアカデミズミの中に形成されたものだが，次第に啓蒙，平易化をめざすユニークな著書を通して学習者の数を増していった．次の二書は名著の定評が高い．

① 吉田洋一「函数論(1938)」はひらがな口語体，ハンデイな全書版として学習者に親まれた．モダンな実関数論の大家がクラシックな複素関数論の本質を説くべく挑んだ．序文にいうように，教科書タイプでない入門書で，概念の明確化を最大目標とするので，重要定理や定義を厳密丁寧にのべるなど，説明の精粗が一様でない．一価関数を完全に終えて，解析接続を説き，多価の対数・巾根関数を論じるのはあいまいさをさけるため，数列・関数列は必要時点でとり入れる．留数導入をローラン級数の後にしており，以後の多くの著書の範となった．図版は少く練習問題が全くないのは，用語の正確理解のみをねらったためか．

② 能代清「初等函数論(1954)」は基礎の平易明快な解説をめざし，理工科学生の教科書用にかかれた．近代関数論の立場からの懇切な入門書であった．冒頭章で複素数から級数，積分まで一きょに導入しきる．後の各章で詳論する準備の設定である．正則関数から初等関数に入るのは逆関数をもとめる必要から，調和関数，有理型関数，等角写像，楕円関数の順で近代的スタイルを成す．等角写像では幾何学的関数論の平易化でユニークな図を加えて魅力的だが，数学以外への応用では迫力は弱い．著書の得意とする解析接続は「一致の定理」の項に濃縮され興味深くかかれている．演習書を伴って広まった．

2—3 関数論の応用教育上の著書

関数論を物理・工学へ応用する努力が続けられてきた．佐々木達治郎「等角写像と応用(1939)」，友近晋「楕円函数論(1942)」は名著である．数学者松本敏三，蟹谷乗養，高橋進一らの著書もある．次の二書は比較的新しいが広く読まれてきた．

① 鬼頭史城「等角写像とその応用(1955)」は初学者にわかるかき方である．流体力学・電気工学上への応用として説く．等角写像が工学上なぜ必要か，等角写像の幾何学的，解析的説明をていねいに行う．数学的厳密性はねらわず，実用上の具体例を多数とりあげて，図解で示す．とくに円弧三角形，弦月形の種々の画き方，写像の合成など数学書ではえられない魅力的なものを含む．

② 石津武彦「関数論とその応用(1958)」は計算上の応用を主体にしたかき方である．冒頭で「論理的書物は心理的障壁があり，応用主体の書物はまとまりがないので，その中間をねらう」と説く．もっとも，写像の応用例として一次関数，渦線・流線・翼断面が図示で扱われるが，全体に占める割合は小さい．むしろ厳密証明をさけた定理・公式を選別列挙して，初等関数から特殊関数まで広範囲に工学者の応用領域を認識させるものである．

2—4 今日の関数論教科書の傾向

大学教科，種類多く2，3年次対象が大部分．内容は複素関数，微積分法，特異点，留数，等角写像が主で，調和関数，解析接続，楕円関数は従である．大きく三つの型に分類できる．一つは実変数微積分学との関連を強くだし，概念修得を重視，平易の計算をめざすもの．二つは理工系一般正統型で ε-δ 式論調で説き古典色で理論・計算力をもとめるが，他への応用は殆ど扱っていないもの．三つは理学系で，基礎に集合・位相・代数の準備をして，本論での簡潔叙述をねらう現代的かき方のもの．

高専教科，種類少く3，4年次対象である．創設初期にかかれたままで，現時の学生の学力を考えた新訂は殆ど行われていない．理論面の簡潔平易化のあとはわかる．初等関数と留数計算でおさえて等角写像や特異点，解析接続はさわりの程度である．厳密理論を表面にださず，級数は理論の根拠を明かさず認める形であり，例題は計算問題を多く扱う．工学系ゆえに関数論を意識的に応用に結びつけんとする割に具体例は少い．これは関数論教育の目標を明確にさせること，数学者と工学者の協力による教科書作りが進んでいないからか．

3. 関数論指導の実際例

本校における過去10年間の3年次指導を授業時数で区分し，指導内容と結果を示す．

3—1 時期区分

ⓐ 第1期（S40～46） 1年複素平面10h， 3年複素関数50～65h （週3h），
ⓑ 第2期（S47～50） 〃 〃 40～50h （ 〃 ），
ⓒ 第3期（S51～52） 3年複素平面，複素関数45～50h（ 〃 ），
ⓓ 第4期（S53～54） 〃 〃 35～40h（週2h）．

ⓐ は10年前，学力程度の高かった頃，複素数1，3年でダブリ，時間数多く練習も十分できた．高専用「解析学」の内容はほとんど終える．

ⓑ は学力低下の兆がみえだし，1，2年で進度が遅れ3年にしわよせ，微積分重視で関数論の時間数削る．練習が減り応用への発展が困難になる．「高専の数学Ⅲ」使用．

ⓒ は中・高の教育課程の改訂が進み，中学で三角比，高校で複素平面が除かれる．1年で三角関数にて複素平面までできず，複素関数は3年集中型となり，時間不足ぎみ．

ⓓ は高専新教育課程で本校では3年数学5単位となり，微積分重視で複素関数の時間大きく減る．しかも3年集中型をとる（新課程では3年までに複素平面，他は4年以降）．

以上を総じてⓐからⓓへ徐々に関数論は時間数を減じ，短期集中型へと変じてきた．それには専門学科からの要請の強い微積分指導ほどの緊迫性をもたないという要因もあった．

3—2 指導内容の推移

ⓐ の代表年度S45(1970) 総時間数 65h（内練習20h） 項目を列挙する．

複素数，図示，ド・モアブル，複素関数，1次関数（円円対応，等角写像，鏡像原理），複素球面，指数関数，三角関数，双曲線関数，複素数列，関数の極限，∞，連続，微分法，CR式」25h 正則関数，等角性，実変数線積分，複素積分，コーシー積分定理・積分公式，留数，実積分への応用」45h 対数関数，逆三角関数，逆双曲線関数，代数学の基本定理，級数，関数列，収束円，テイラー展開，ローラン展開，特異点，留数」65h

ⓒ S52(1977) 総時間数50h（内練習10h） 各時間の内容を回をおって示す．

1　数の拡張，複素数四則，複素平面
2　極形式，複素数四則と図表示
3　積・商の図表示とド・モアブルの定理
4　ド・モアブル定理応用，累乗根
5　オイラーの公式(6，7練習)
8　複素関数の定義
9　複素関数と写像
10　1次関数
11　円円対応，無限遠点
12　反転法作図，円弧三角形
13　e^z，cos z と写像(14，15，練習)
(複素数計算問題・反転作図レポート)
16　極限値，連続性
17　正則関数の定義，微分法公式
18　CR式と説明
19　正則関数，調和関数 (20，21練習)
22　逆関数，$\sqrt[n]{z}$，リーマン面
23　逆関数，log z
24～35　等角写像とその応用
(1次特殊関数，流体力学へ，練習2h)
36　複素積分の定義と計算の仕方
37　コーシーの積分定理
38　〃　の系
39　正則関数の積分表示(40，41，練習)
42，43　級数の復習，複素級数
44，45　テイラー展開
46，47　ローラン展開
48　留数定理
49，50　実積分への応用
(レポート「複素関数を学んで」提出)

ⓓ　S53(1978)　総時間数40h(内練習10h)　各時間の内容を回をおって示す.

1　複素数の復習
2　複素数四則・図示
3　極形式，積商図表示
4　練習
5　ド・モアブル，累乗根
6　累乗根，オイラー公式
7，8　練習(テスト)
9　複素関数，w=az
10　複素関数，写像
11　1次関数
12　反転図法，円弧三角形
13　円円対応，w=e^z
14　w=cos z 三角関数公式
15　対数，逆三角関数計算
16　練習
17　初等関数のまとめ
18　関数の連続，極限
19　微分法
20　CR式，$(e^z)'$ $(\cos z)'$
21，22　練習
23　複素積分の定義・公式
24　複素積分の計算例
25　コーシーの積分定理
26　〃　〃　系
27　コーシー積分公式
28　積分公式用法，共役調和
29，30　練習
31　積分公式の拡張，級数
32　複素級数と収束円
33　テイラー展開
34　ローラン展開
35，36　練習
37　特異点，留数
38　留数定理，留数計算
39，40　実積分への応用

総じてみると，ⓐでは複素平面は反復で導入時にゆとりがある．積分以降の時間多く実積分への計算に相当深入りしてやや食傷ぎみ，数学的総花式で応用面が欠落した.

ⓒでは学力低下と集中型からの倦きを考慮して，微分法の工学系の応用として等角写像を力点にすえる．積分以降は要点をおさえるのみで練習時間が不足した.

ⓓでは短期集中型を改めて複素平面と複素関数との間に約半年間の反すう期間をおく．数学の計算力と概念把握に力点をおき，練習時間を減らさなかった．他への応用は断念する.

3—3　最近における指導結果と考察

次節で理解力を調べる資料にしたいので，ⓓの1年間4回テスト (M科80名) を扱う．テスト問題を A，A′，B，C の順に示し，成績集計を別表にかかげ，諸考察でしめくくる.

(テストA) S53.5.11　50分　78人

A1　① $Re(i/1-i)$　② $z=(1+2i)(3+4i)$ の $\bar{z}$　③ $\arg(\sqrt{3}-i)$

④－3の極形式　⑤ $e^{1+\frac{1}{4}\pi i}$ の $x+iy$ の形

A2 次の z の図形を画け．① $1\leqq|z|\leqq2$ ② $0\leqq\arg z\leqq\frac{\pi}{2}$ ③ $|z|=1,\ 0\leqq\arg z\leqq\pi$

A3 $|z+2i|=2|z-i|$ にて① $z=x+iy$ として $x,\ y$ の関係　② z の図形

A4 $-2+2i$ の3乗根について ① ド・モアブル定理で計算　② 複素平面に図示

(テストA′) S53.6.12 30分 78人

A′1 $\arg(1+\sqrt{3}i/\sqrt{3}+i)$

A′2 $z_1=3a-4bi,\ z_2=a+bi$ (a, b 実数 $ab\neq0$) 原点0として次を求めよ

① $0z_1,\ 0z_2$ が2隣辺の平行四辺形の第4頂点 z, ② $z_1,\ z_2$ の距離

A′3 $z=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ として次の極形式 ① z^2 ② $-z$

A′4 方程式 $z^6=-1$ の根を極形式で求め，そのすべての根を図示せよ．

(テストB) S53.12.12 60分 76人

B1 $w=f(z)$ にて $|z|=r,\ \arg z=\theta,\ r\neq0$のとき $|w|,\ \arg w$ を求めよ

① $f(z)=z^2$, ② $f(z)=2iz$, ③ $f(z)=3/z$

B2 $w=f(z)$ にて $w=u+iv$ とせよ ① $f(z)=-1/z$ ② $f(z)=iz^3$

B3 $f(z)=e^z$ について証明せよ ① $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$ ② $f(z+2\pi i)=f(z)$

B4 $f(z)$ について $z=1$ のときの値を出せ ① $f(z)=\log(iz)$ ② $f(z)=z^{\frac{1}{4}}$

B5 $f(z)=z^2+1/z+i$ について ① $z\to1+i$ のとき $f(z)\to a+bi$ を求めよ

② $f(z)$ が複素平面全体で連続になるためにはどうすればよいか．

B6 次に答えよ ($\sin z$, $\cos z$ を $u+iv$ の形で与えてある)

① $\cos z=e^{iz}+e^{-iz}/2$ から出せ ② CR式を用いて $(\sin z)'$ を出せ

(テストC) S54.3.1 60分 76人

C1 $\int_C xdz$ Cは$1\pm i$, $-1\pm i$ を4頂点とする正方形の正向きの1周路

C2 図に6曲線 $\gamma_1\sim\gamma_6$ が与えてある．単一閉，内部，離れた，始点終点同じなど，正則不正則部分のある $f(z)$ の6コの1周積分の間の関係式を出せ（図略）

C3 コーシ積分公式から $\int_C\frac{e^{2z}}{z^2+1}dz$ をだせ C：$|z-i|=1$

C4 $f(z)=1/1+z$ の $z=2$ を中心とするテイラー展開，収束域の図示

C5 $f(z)=1/z(z-1)$ の $z=1$ を中心とするローラン展開，収束域の図示

C6 $f(z)=z/(z+1)(z-2)(z+4)^2$

① 極をすべてあげ，位数もいえ ② C：$|z|=3$ として $\int_C f(z)dz$ を出せ

〔Aの考察〕3年次当初に複素平面の学習を始めて1カ月後，複素平面までの範囲，計算主体の A1, A2 を合わせて70%余でよいが理論を伴う A3, A4 は合わせて50%程度のでき，A1 ①のように少しひねると極端によくない．正答率からいえば A3, A4 は40%以下で満足のいくものではない．計算地力がついていない．反すうの時間は必要である．

〔A′の考察〕テストAのあと1カ月間複素数を離れた後，Aと同範囲．A′1, A′2②, A′4 など単純な計算や累乗根の図示では大分向上している．複素平面の幾何では A′2② のようなものでもよくない．A′3②は z と $-z$ の関係だから少し考えればわかりそうだができないのは図形的な弱さであると見られる．AとA′から型通りの計算は反復で向上するようだ．

〔Bの考察〕複素平面学習後丸5カ月を経て後期より複素関数に入り2カ月間，微分法まで

	成就率	正答率		成就率	正答率		成就率	正答率
A 1	70.0%		B 1	36.1%		C 1	63.6%	27.6
①	46.8	34.6	①	44.7	28.9	C 2	56.1	28.9
②	78.0	67.9	②	25.8	9.2	C 3	59.2	32.9
③	67.3	66.7	③	37.9	23.7	C 4	29.4	10.5
④	76.5	74.4	B 2	82.1		C 5	37.7	18.4
⑤	81.4	71.8	①	85.5	73.7	C 6	65.4	40.8
A 2	75.2		②	78.7	60.5	計	51.9	
①	78.8	76.9	B 3	51.3		Aのσ	21.9	
②	71.5	66.7	①	61.6	51.3	A′のσ	23.0	
③	75.4	62.8	②	41.1	31.6	Bのσ	22.1	
A 3	48.1		B 4	58.6		Cのσ	22.5	
①	52.4	39.7	①	70.8	60.5	A′1	64.4%	51.3
②	35.4	28.2	②	46.3	40.8	A′2	54.1	
A 4	52.0		B 5	60.7		①	74.4	74.4
①	59.1	29.5	①	83.7	67.1	②	33.8	32.1
②	30.5	26.9	②	37.6	9.2	A′3	40.1	
			B 6	46.8		①	64.9	64.1
			①	52.1	47.4	②	15.4	15.4
			②	44.1	25.0	A′4	72.3	57.7
計	63.6		計	53.9		計	60.6	

成就率：中間点をみとめた総得点の全配点に対する割合
正答率：完全正解者数の全人数に対する割合

の範囲，関数値のだし方は大体わかるが，写像はかんたんなものでもよくない．B1は悪い．B3② 周期性の証明は意外なほどできない．B4②は複素関数値としての $1^{\frac{1}{4}}$ の意味がとりにくかった．B5② 連続性は抵抗が大きい．B6② CR式は知っていても計算が伴わない．〔Cの考察〕積分法主体で展開・留数までの範囲．難解部分にしては成就率は大体の線，正答率では級数展開がひどく悪い．学習後テストまで半月間の反すうではこの種の内容は頭に入らない．積分定理や留数定理を用いる計算ではよい結果がでる．複素積分は実積分のような腕力に訴える計算ではないので，理論やイメージへの興味や慣れが向上に続く．

4. 関数論指導への問題提起

4—1 関数論の概念把握から見た問題点

(1) 複素数に関連する諸性質・諸計算の習熟度

複素数の四則計算は機械的で，とくに思考を要することではない．下級でできてなぜ上級でできないか，乗除計算では不注意ミスが主で，その他は新記号での不確実さもあって興味関心のなさに関係する数学への初歩的非力もある．極形式が不正確なのは三角関数の実力不足と一体である．複素平面の幾何問題にひかれる割に，処理能力が示されないのは代数の計

算力不足が原因のようだ．複素数自体を数としてつかめず，平面上の点表示と合わせた諸機能がわかっていない．これらを考え合わせると，複素関数の短期集中型指導にはかんじんな数の基盤が固まっていないという不安がつきまとう．

(2) 初等関数の拡張から生じる複雑性

オイラーの公式に基づく指数・三角関数の関連など，初等関数の統一的解釈は興味をひく．関数の種類の拡大を進めて対数・逆三角関数など多価のものまで初期にとりこむことは，数学の形を整えるにはよくても，内容を混乱させて理解を悪くする．元来，初等関数自体も明確な定義によって構成的につかんでいるわけではないので，関数をもうらすることは無理である．基本的な1価のもの z^n, $az+b/cz+d$, e^z, $\sin z$, $\cos z$ に限定しておく方が無難である．e^z の定義も単に指数 x を z にかえたという形式でなく，巾級数の形から入る深化と拡大の意義に注目させたいのだが，理解には疑問がある．

(3) 写像への図形的基礎

初等幾何の知識が全体的に不足し整理されていないこと，とくに円や比例の考察（接線，方べきの理，直角三角形・相似に関するものなど）の不十分さが影響して，作図に弱く1次関数の反転法などの写像考察では興味は半減してしまう．複素球面との射影対応でも立体解析幾何の基礎は必要である．本質的には図形の性質で証明を通した確実なとらえがないので理解と活用に至らない．変換を式で表現しえた喜びもない．2曲線のなす角の定義を微積分学でつかんでいないと，写像の等角性を考えるにも戸惑いがある．この辺にも，近ごろの幾何教育に欠けている計量性の一般的定義とその統一的見方の訓練がもとめられる．

(4) 正則性の多角的考察

実関数の微係数は速度・増減・接線の3面性があった．複素微分法はそれほどリアルではないが，導入時に抵抗が少いのは，慣れた微分計算式の延長との先入観からでもあろう．図形的意味づけ（等角性）を早い時期に行うことは学習に迫力をもたせるが，$f'(a)\neq 0$ が a での等角条件であることの理解はたやすくない．CR式のもつ重要性から証明は確実にするべきだ．調和関数の出現はその場限りだが，特別な実関数として微分方程式では役立つ．正則な関数は関数論では常用的となり，積分法に至って本領を発揮する．正則（解析）性を級数展開に結びつける扱いは初等関数論としては終極目標でもある．

(5) 複素積分法の抽象性

実変数の積分導入に比べたら複素積分の定義ほど抽象的で魅力に乏しいものはなく，関数論をきらうもとにもなる．指導上工夫すべきことは多いが，実変数の線積分の定義と計算に慣れさせ，重積分と関連づけてグリーンの定理を準備することは以後に役立つ．これによるコーシーの積分定理の証明は正則条件をCR式に結んで線積分の値ゼロを鮮明にする．コーシーの定理の意義は次第にわかってくるが，重要性の力説と式の単純性もあって理解はよい．複素積分を実積分になおす計算は実際にはめんどうで確実性はもとめにくい．積分定理や積分表示式を用いる一周積分の計算に興味を示すのは形のきれいさにもよる．

(6) 級数理論の理解度

初等解析学教育が今日の普及をみたのは，厳密性にこだわらない図形的直観性などで扱う証明の簡素化をとり入れたことにもよる．理論内容が高度になれば飛躍部分も生じてこのいき方にも限度が現われる．基礎をあいまいにした級数の導入はかんじんな所では理解をぼや

けさせる．実級数では収束半径を認める形をとった．複素級数の場合さらに抽象的となり認める部分が多く，テイラー展開式が積分公式から導かれ，ローラン展開がテイラー展開の拡張だと説いてもなかなか理解されない．初等関数の定義は巾級数からであった．複素平面での定義域（収束域）が問題になる．一様収束を伴う級数理論は程度をこえる．

(7) 留数定理の有用性の認識

複素積分法を学べば留数による実積分計算ができるのが関数論学習の効果とでもいえるか．留数の定義のあと，留数計算や留数定理の用法は比較的スムースにいく．もっとも実積分の計算には厳密な評価式の扱いもいるので決してたやすくはない．実例による手法説明には共鳴理解を示す．留数の定義をやっかいな級数理論（ローラン展開の－1乗べきの係数というのがたいていの著書のいき方）のあとにしばっておくことは，関数論学習の道は長く息切れを生じることにもなる．特異点は極だけにしぼればよいが，一般論を扱って種類などを論じだせば程度をこえてしまう．

(8) 解析接続理論の目的性

接続の理論は一般的な定義や定理の列挙にとどまれば，抽象的で理解困難を増すだけである．的のしぼり方が大事である．根底をなす「一致の定理」をおさえることは無理ではない．実変数の初等関数を実軸から接続して複素領域まで拡張して複素変数の初等関数をつくらせ再認識させる．また接続による関数関係の不変性を容認すれば，実関数の間の関係式を複素変数まで拡大できる．この項目は式の計算にて実地に定理を確認することは少いだけに概念のとらえ方が問題である．接続の目立った好例として1関数要素から出発して自然境界まで広げて解析関数をつくるもの $1/1-z=1+z+z^2+\cdots$ があり，概念はつかめる．

4—2 高専の関数論指導上の問題点

(1) 指導内容と方法

新課程は大項目で，複素数，複素関数，正則関数，複素積分，展開・留数となっており，小項目は留意点を示すだけで規定しないが，旧課程の標準と比べて，その内容は積分・展開の部分で目立つほど程度をさげていないことは明白である．

本来，複素数の導入は1年次では形ばかりで体をなさない．つまり四則計算だけで数の性質はほとんど不明のままである．複素数の図表示は2年次ベクトルの中であるが，加減と定数倍の類似性はあっても全体的にはベクトルとは異質である．しっくりしない出現である．複素平面での考察は三角関数の学力とともに関数論学習の基礎である．数論の項を設けて，複素数の代数的・幾何的扱いをていねいにやり，複素関数に先だつにわかづくりの最小限のとり入れ方でなく時間をかけて行う．1年以上の間をおいての4年次関数論では，複素平面の復習は当然必要になる．

関数論の履修方法として，複素平面と複素関数を続ける集中型には難点があるが，その間隔がありすぎるのも効率上問題がある．理解と把握をよくするには，半年位の間隔をおいて，代数的（複素平面）部分，解析的（微積分）部分，応用（等角写像：物理・工学へを主にした）部分のように三つに分けアクセントをつける方が効果的である．

関数論を数学の体系で整えようとすれば今より内容を減らすことはできないが，対象の年令や工学系，時間数を考えれば重要事項に限定する精選はやむをえない．また多価関数やリーマン面は程度をこえている．級数展開も整理してあとまわしか(付)とする方がよい．

(2) 指導目標と力点

関数論の位置を微積分学の延長線上でとらえるという意味を考える．端的にいって数・関数・演算を拡張の考えで発展させていく．関数論の独特の価値は諸計算の機械化・自動化とともに，写像理論という新しい視界の展開があることを強調すべきである．応用の面からみて，$f(x)$ と $f(z)$ は同じ変化をしらべるにも差違はある．1次元的変化—速度・加速度—に対して，2次元的変化—流線・ポテンシャル—など．

指導の主目標は，複素数の機能とくに図形問題の処理能力，複素関数の統一性，写像概念の把握，微分法と応用（等角写像），積分法と応用（実積分計算）にしぼって一貫できるよう内容や練習題を平易化・合理化して，関数論的手法が身につくようにする．

指導の力点をあげる．1次関数は1対1写像として重視する．反転法を知り，円弧三角形など作図に慣れさせる．微分法をするからには等角性とCR式の証明は理論を明確にする上で必須である．種々の写像の合成は興味ある所だが，深入りすると時間がかかり，本筋からそれるのであと回しにする．また積分法のねらいは実積分への応用にあるのだから，コーシーの積分定理・積分公式から直ちに留数の定義をとり入れる．留数定理を用いて実積分実例で利用に関心をもたせるが，計算力を実際にきたえるには学力に難点がある．ローラン級数からの留数の定義は(再)とし，特異点の理論は(付)に属させる方がよい．

(3) 関数論と数学史教育

関数論指導上，固有名詞のつく定義や定理を多く扱う．その説明に加えて，集中的にその数学の発展の歴史を取りあげることは，数学の学習意欲と科学一般への関心を広げる．そのことは微積分学指導で経験ずみである．問題は時間の捻出である．終末におく方がよい．

関数論の発生の時代をさかのぼれば，微積分以後であり決して古い部門ではない．16世紀後半に3次方程式の代数的解法に関連して虚数が数の資格をもち四則演算が作りだされた．18世紀中葉にはオイラーの公式が発見され，複素関数の基本事項は多く知られるようになっていた．アルガンの図表示，ガウスの複素平面が確認されたことが一大飛躍であった．ルイブニコフはいう「複素関数論の歴史の発端は基本的な概念に正確な定義を与えたときである．それはまず複素数の概念の幾何学的な意味をはっきりさせることであった」と．

オイラー，ガウス，コーシーの基礎固めと充実があって19世紀後半の黄金期を迎える．ワイエルシュトラスやリーマンの解析関数や等角写像の理論が築かれる．初等解析では，円分方程式，コーシーの積分定理，代数学の基本定理などのもつ意味を物語る道草も必要であろう．古典といわれる関数論も幾何学的関数論として近代化をはかり，多様体や等角写像論では位相的な問題も加えているし，多変数解析による理論発展も進められ，リーマン面上の調和関数の考究など内容は豊かである．高専教育の中で科学史講義がもとめられている．その一環として数学史が話題に上ってきてもよい．微積分学と関数論の歴史は好教材である．

あ と が き

本稿は1968～79年にわたる筆者の関数論教育の回顧と展望であるが，データの提出が最近に偏したのは紙面の都合による．数学教育の上では関数論は古典と考えられ，微積分学同様，指導の型がほぼきまっていて新しい方法論など入りこむ余地もないほどである．

筆者の関心は，対象が高専3年次という，関数論指導上，わが国では最も低い年令への試

みということにあった．これはかつて微積分学を高等数学という高嶺からおろして，低所に育てるべくなされた努力にも似ていた．

数学教育に平易化・普及化が叫ばれることがしきりであるが，そうかといって横がきのものを縦がきにして教えても学力にはならない．数・式での理解において，関数論的思考と手法を身につけさせることがねらいである．指導の現場における最大制約が，内容もさることながら時間数の絶対量のカベであることも事実である．

参　考　文　献

(1) 竹内端三：函数論　上巻，下巻　　裳華房　1926
(2) 掛谷宗一：一般函数論　　岩波書店　1931
(3) 吉田洋一：函数論　　〃　1938（第2版　1965）
(4) 能代　清：初等函数論　　培風館　1954
(5) 佐々木達治郎：等角写像と応用　　1939（復刻理工学社　1974）
(6) 友近　晋：楕円函数論　　河出書房　1942
(7) 鬼頭史城：等角写像とその応用　　オーム社　1955
(8) 石津武彦他：関数論とその応用　　コロナ社　1958
(9) 能代　清：解析接続入門　　共立出版　1964
(10) 古屋　茂他：解析学　　大日本図書　1968
(11) 田代嘉宏：高専の数学Ⅲ　　森北出版　1969
(12) ア・ゲ・スヴェシニコフ他：複素関数論　　総合図書　1969（1967版　筒井孝胤訳）
(13) カジョリ：数学史　下巻　　津軽書房　1974（1913版　石井省吾訳）
(14) ルイブニコフ：数学史(Ⅲ)　　東京図書　1966（1960版　井関清志他訳）
(15) 日本数学会編：岩波数学辞典第2版　岩波書店　1968
(16) 藤原重幸：数学教育における数学史の指導について　　長野高専紀要　第7号
(17) 藤原重幸：数学の活用能力を高めるための指導について　　長野高専紀要　第9号