攪乱項の変動を考慮した最適公共投資システム*

Optimal Control Problem of Public Investment with System Noise

柳沢吉保**・奥谷　巌***

Y. YANAGISAWA and I. OKUTANI

In our earlier work it was presented that optimization of the dynamic regional allocation problem of public investment can be solved by applying the concept of stocastic control of a system if the regional economic structure is established by a linear econometric model which includes various economic state variables as endogenous variables and public investments as exogenous variables. The optimal investment series derived from this procedure is optimal in that it should maximize "the expectation of the system objective". However, as a matter of course, public investment process can never be repeated. In this paper we present some results of simulations taking the diturbance term (or system noise) included in the econometric model into account in order to reveal the implication of the optimal solution of our specific problem.

1. まえがき

公共投資は，公共土木施設等の社会資本整備や経済成長等の目的を達成させるための重要な手段であり，その効果は広汎多岐にわたる．しかし不適切な投資配分はその効果を阻害することとなるため，妥当な投資配分を行うための周到な計画が必要となる．このことについて，我が国では将来の可能性を模索するための計画型計量モデルを用いた計画策定を行っている[1]．そこでは目標変数が政府の意図する数値となるよう，公共投資等の政策変数を試行錯誤的に動かし，実現されるであろう将来の経済状態を予測し，その中の望ましい状態を実現させる政策変数を選び出して計画策定の参考としている．その方法では多くの試行錯誤を行わなければならないという欠点があるが，動的計画法により解決することができる[1]．しかしながら現実の社会においては予測し難い不確定要素が多く含まれており，当初に立案した計画どうりの経済状態にならない．

そこで本研究では，より現実性を考慮し，計量モデルの中に不確定要素を表わす攪乱項を含めた最適公共投資問題の定式化を行い，さらに攪乱項を変動させた場合の将来の経済状態

---

* 昭和61年11月7日第29回自動制御連合講演会にて発表

** 土木工学科　助手

*** 信州大学工学部土木工学科　助教授

原稿受付　昭和63年9月30日

を予測するためのシミュレーションを構築し，不確定要素を考慮しない場合と比較することによって，その影響をみたものである．

2. 計量モデルを用いた経済システム

本研究においては実用性を考慮し，時間を離散時間とした線形な計量経済モデルを用いる．

いま，t 期における内生変数を $X(t)$，投資量を表わす政策変数を $Y(t)$，外生変数を $V(t)$，撹乱項を $\varepsilon(t)$ とする．線形の計量経済モデルより誘導型方程式を導くと[2]

$$X(t)=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(t-m)+\sum_{m=1}^{M}B(m)Y(t-m)+\sum_{m=0}^{M}C(m)V(t-m)+D'+\varepsilon'(t) \qquad (1)$$

となる．I は $n_1\times n_1$ の単位行列とすると

$A(m)=[I-A_1]^{-1}A_2(m)$，$B(m)=[I-A_1]^{-1}B_1(m)$，$C(m)=[I-A_1]^{-1}C_1(m)$

$D'=[I-A_1]^{-1}D$，$\varepsilon'(t)=[I-A_1]^{-1}\varepsilon(t)$

である．ここで，$X(t)$，$Y(t)$，$V(t)$ はそれぞれ n_1，n_2，n_3 次元ベクトルとしたとき，A_1，$A_2(m)$ は $n_1\times n_1$，$B_1(m)$ は $n_1\times n_2$，$C_1(m)$ は $n_1\times n_3$ のパラメータ行列であり，D' はn_1次元の定数ベクトルである．パラメータは最尤推定法，最小自乗法等により決定する．M は最大時間遅れである．(1)式を空間状態表現に書き換えると，[2),(3]

$$x_t=\Psi x_{t-1}+\Gamma u_{t-1}+\Phi v_{t-1}+d+\xi_{t-1} \qquad (2)$$

と表わせる．x_t は状態量であり，u_t は政策変数，v_t は外生変数，d は定数ベクトル D'，ξ_tは撹乱項 $\varepsilon'(t)$ で表わされる．また，パラメータ Ψ，Γ，Φ については，$A(m)$，$B(m)$，$C(m)$ による行列で表わされるが，ここでは省略する．

ここで撹乱項 ξ_t についてであるが，ξ_t の要素のうち0となっている部分については定数であるから，期待値，分数ともに0であり，$\varepsilon'(t)$ の部分は $\varepsilon(t)$ の正則線形変換であるから，$\varepsilon(t)$ が計量経済モデル同定時に最尤推定法により多次元正規分布として決定されていれば，やはり多次元正規分布となり，その期待値も分散，共分散行列も容易に決定できる．[4]

ここで本研究における ξ_t の性質として

$E(\xi_t)=0$，$E(\xi_t\xi_t^T)=\Sigma_\xi$ (既知)，$E(\xi_t\xi_{t'}^T)=0$ $(t'\neq t)$

を仮定する．ここにTは転置を表わす．期待値は 0，Σ_ξ は ξ_t の分散共分散行列を表わす．

3　確率制御[5] による経済政策

(1)　評価基準について

本章における目的は，$t=1$，2，……，N なるN期にわたって，ある評価基準を最適にするような政策変数 u_t を求めることである．評価基準については

$$E(J)=\sum_{t=1}^{N}E(W_t)=\sum_{t=1}^{N}E(a_t x_t) \qquad (3)$$

のような状態量の線形の式で表わす．(3)式では期待値をとっているが，これについては(2)式のシステム方程式に撹乱項 ξ_t を含んでおり，x_t が確率変数となるため，$E(J)$ も確率変数となるので式(3)の期待値をとったものを評価基準としなければならない．(3)式の a_t は経済

システム内の最大化したい変量；例えば税収，生産所得，歳入等に対する重みベクトルである．

(2) 経済政策

ここでは，式(3)を最大にする u_0, u_1, ……, u_{N-1} を，線形制約条件

$$H_t(x_t, u_t) \leqq 0 \qquad (t=0, 1, \cdots\cdots, N-1) \tag{4}$$

の制約条件の下で求めることを考える．ここに H_t はh次元の線形ベクトル関数とする．

ここで計算を進める前に，次のような表記法に従うこととする．まず，x^t は x_0, x_1, …… x_t を表わすものとする．また，$E(y|z)$ および $P(y|z)$ はそれぞれ z が生起したという条件の下における y の期待値と確率密度関数を表わす．さらに $f(x)$ を x の関数としたとき，$\int f(x)dx$ は x のすべての要素に関する $f(x)$ の積分を表わすものとする．

1) 最後の期間について

動的計画法の理論により，最後の期間を最大化する．つまり次式

$$E(a_N x_N)=E(E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})) \tag{5}$$

について最大化を行えばよい．(5)式において，外側のEは x^{N-1}, u^{N-2} に関してとる期待値を意味している．すべての x^{N-1}, u^{N-2} について $E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})$ を最大化するならば，$E(a_N x_N)$ も最大化できるので

$$E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})=\int a_N x_N p(x_N, u_{N-1}|x^{N-1}, u^{N-2})d(x_N, u_{N-1}) \tag{6}$$

の最大化について考える．(6)式の $p(x_N, u_{N-1}|x^{N-2}, u^{N-2})$ については，チェーン・ルールにより

$$p(x_N, u_{N-1}|x^{N-1}, u^{N-2})=p(u_{N-1}|x^{N-1}, u^{N-2})\cdot p(x_N|x^{N-1}, u^{N-1}) \tag{7}$$

と展開でき，ξ_t の時間的独立性を考慮すると，$p(x_N|x^{N-1}, u^{N-1})=P(x_N|x_{N-1}, u_{N-1})$ となる．また u_{N-1} の条件付確率を $p(u_{N-1}|x^{N-1}, u^{N-2})=\rho_{N-1}(u_{N-1})$ とおくと，式は次のようになる．

$$\begin{aligned} &E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})=\int \lambda_N \rho_{N-1}(u_{N-1})du_{N-1} \\ &\text{ここに}\quad \lambda_N=\int a_N x_N p(x_N|x_{N-1}, u_{N-1})dx_N=a_N(\Psi x_{N-1} \\ &\qquad\qquad +\Gamma u_{N-1}+\Phi v_{N-1}+d) \end{aligned} \tag{8}$$

x^{N-1}, u^{N-2} については与えられているので，(8)式は u_{N-1} の関数であることがわかる．従って理論的には λ_N は u_{N-1} に関して最大化すればよい．いま $E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})$ を最大にする u_{N-1} を u_{N-1}^* とすると最適な ρ_{N-1}^* は $\delta(u_{N-1}-u_{N-1}^*)$ である．定義として

$$\nu_N^*=\max_{u_{N-1}} \nu_N \qquad \text{ここで}\ \nu_N=\lambda_N \tag{9}$$

とすると

$$\max_{\rho_{N-1}} E(a_N x_N|x^{N-1}, u^{N-2})=\lambda_N(u_{N-1}^*)=\nu_N^* \tag{10}$$

となり，λ_N を最大化すればよいことを示している．従って，最終期間については，u_{N-1}^* を求めれば最適化の操作は終了することになる．(8)式よりN－1期において最大化されるのは，$a_N\Gamma u_{N-1}$ である．式(4)の制約条件を，ｉを公共投資，ｊをゾーンとして具体的に

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_j^i(k) \leqq \alpha(k)x^1(k) \qquad (k=0, 1, \cdots\cdots, N-1) \tag{11}$$

とおく．$\alpha(k)$ はk期における，ある状態量 $x^1(k)$（例：歳入量）に対して全公共投資額が占める割合である．ここで，それぞれの公共投資額が全公共投資額において占める割合を ζ_k とおき（ζ_k はベクトル），u_k を

$$u_k = \alpha(k)x^1(k)\zeta_k = F_k x_k \zeta_k \qquad (k=0, 1, \cdots\cdots, N-1) \tag{12}$$

と表わすことにすると，次の問題を解くことになる．

$$\begin{cases} \text{目的関数：} & a_N \Gamma \zeta_{N-1} \rightarrow \max \\ \text{制約条件：} & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^i(N-1) \leqq 1 \\ & \underline{\zeta}_j^i(N-1) \leqq \zeta_j^i(N-1) \leqq \overline{\overline{\zeta}}_j^i(N-1) \end{cases}$$

（一：下限値，＝：上限値） (13)

$\zeta_j^i(k)$ は，ベクトル ζ_k の要素である．

この問題の最適解を ζ_{N-1}^* とすると，(8)，(9)，(10)式より ν_N^* は

$$\nu_N^* = a_N(\Psi x_{N-1} + \Gamma \zeta^*_{N-1} F_{N-1} x_{N-1} + \Phi v_{N-1} + d) \tag{14}$$

と表わされる．

2）最後から2つの期間について

最後から2つの期間について $E(W_{N-1}+W_N|x^{N-2}, u^{N-3})$ の最大化を行う．まず $E(W_{N-1}|x^{N-2}, u^{N-3})$ について考える．ここで

$$\lambda_{N-1} = \int a_N x_{N-1} p(x_{N-1}|x_{N-2}, u_{N-2}) dx_{N-1} \tag{15}$$

と定義すると

$$E(a_{N-1}x_{N-1}|x^{N-2}, u^{N-3}) = \int \lambda_{N-1}\rho_{N-2}(u_{N-2}) du_{N-2} \tag{16}$$

と書くことができる．一方，$E(W_N|\chi^{N-2}, u^{N-3})$ については，最後の期間で行ったように，

$$E(W_N|x^{N-2}, u^{N-3}) = E\left(\int \lambda_N \rho_{N-1}(u_{N-1}) du_{N-1} | x^{N-2}, u^{N-3}\right) \tag{17}$$

となるが，χ_{N-1} が与えられたときの u_{N-1} の最適解が決まっているのでその値を用い，

$$\max_{\rho_{N-2}} E(W_{N-1}+W_N^*|x^{N-2}, u^{N-3}) = \max_{\rho_{N-2}} \int [\lambda_{N-1} + \int \nu_N^* p(x_{N-1}|x^{N-2}, u^{N-2})\, dx_{N-1}] \rho_{N-2}(u_{N-2}) du_{N-2} \tag{18}$$

となる．定義として，

$$\nu_{N-1} = \lambda_{N-1} + \int \nu_N^* p(x_{N-1}|x^{N-2}, u^{N-2}) dx_{N-1} \tag{19}$$

とおく．ν_{N-2} を最大にする u_{N-2}^* を u_{N-2}^* とすると，最適な ρ_{N-2} は $\delta(u_{N-2}-u_{N-2}^*)$ となり，最後から2つの期間については，u_{N-2}^* を求めれば最適化の操作は終了する．(19)式の計算を行うと，

$$\nu_{N-1}=\tilde{a}_{N-1}(\Psi x_{N-2}+\Gamma u_{N-2}+\Phi v_{N-2}+d)+a_N(\Phi v_{N-1}+d)$$
$$\text{ここに}\quad \tilde{a}_{N-1}=a_{N-1}+a_N(\Psi+\Gamma\zeta_{N-1}{}^{*}F_{N-1}) \tag{20}$$

となる．(20)式よりN－2期において最大化されるのは $\tilde{a}_{N-1}\Gamma u_{N-2}$ である．これにより，ここでも(13)式のような線形計画問題に変換することができる．

3）一般的な第k期について

一般的な第k期についての最大化については，1)，2)と同様な考え方により，次の線形計画問題を解くことになる．

$$\left\{\begin{array}{lll}
\text{目的関数：} & \tilde{a}_{k+1}\Gamma\zeta_k & \to \max \\
\text{制約条件：} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j{}^i(k)\leqq 1 & \\
 & \underline{\zeta}_j{}^i(k)\leqq\zeta_j{}^i(k)\leqq\bar{\bar{\zeta}}_j{}^i(k) & \\
\text{ここに} & \tilde{a}_{k+1}=a_{k+1}+\tilde{a}_{k+2}(\Psi+\Gamma\zeta_{k+1}{}^{*}F_{k+1}) & \\
 & \tilde{a}_N=a_N,\ a_{N+1}=0,\ u_k=F_k x_k\zeta_k,\ (k=0,1,\cdots N-1) &
\end{array}\right. \tag{21}$$

(21)式により，初期値 x_0 を与えると，各期の最適公共投資が決定される．以上により，システム方程式が(2)式，制約条件が(11)式のように線形で与えられ，目的関数が(3)式のように線形で，その期待値をとる場合には，システム方程式に攪乱項 ξ_t を含めない決定論的な方程式を用いた場合の最適投資パターンと同じになることがわかった．

4．攪乱項の影響を考慮に入れたシミュレーションの構築

政策者の意図するような経済状態になるように経済政策を立案しても，経済状態は，各期において起こる偶発要因により当初の計画どうりにはならない．そこで当初に立案した最適投資パターンが不確定要因により，どのような影響を受けるかをみるためのシミュレーションを構築する．

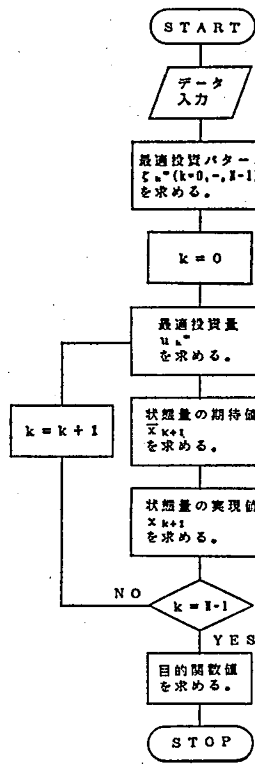
シミュレーションのフローチャートは図－1に示す．

シミュレーションの計算手順を示すと次のとうりである．

Step1　パラメータ Ψ，Γ，Φ，d，状態量の初期値 x_0，
重みベクトル a_k ($k=1$, 2, ……, N)
割合ベクトル F_k ($k=0$, 1, ……, $N-1$)
分散共分散行列 $\sum_\xi$，投資割合 ζ_k ($k=0$, 1, ……, $N-1$) の上下限値等のデータの入力．N は計画期間

Step2　式(21)により，計画年数間 N の最適投資パターン $\zeta_k{}^*$ ($k=0$, 1, ……, $N-1$) を決定する．

Step3　状態量 x_k と量適投資パターン $\zeta_k{}^*$ より最適投資



図―1　シミュレーションフローチャート

量 $u_k{}^*$ を求める．

Step4 撹乱項 ξ_k を除いたシステム方程式 $\bar{x}_{k+1}=\Psi x_k+\Gamma u_k+\Phi v_k+d+\xi_k$

より第k＋1期の状態量の期待値 $\bar{x}_{k+1}$ を求める．

Step5 (22)式に従う正規乱数(6)を発生させ，第 k＋1期の状態量の実現値 x_{k+1} を求める．

$$p(x_{k+1})=\mathrm{const}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^{\mathrm{T}}\sum\nolimits_{\xi}^{-1}(x_{k+1}-\bar{x}_{k+1})\right\} \tag{22}$$

Step6 kが計画期間N－1になれば，状態量 x_k（k＝1，……，N）より目的関数値を算出し計算終了．そうでなければk＝k＋1として Step 3．へ戻り，計算を繰り返す．

以上の手順でシミュレーションを行う．

5. 仮想モデルによる計算例

システム方程式，制約条件，目的関数について，それぞれ(2)，(11)，(3)式のような線形とした場合についての仮想的なモデルによる数値計算例を示す．対象とする地域は5つとし，1，2ゾーンを中心業務地区，3，4ゾーンは中心業務地区をとり囲む地区，5ゾーンは最も外側の地区として，次のような変数を用いて仮想的な計量経済モデルを作成する．

$x_j{}^1(t)$: t期のゾーンjにおける住宅立地量
$x_j{}^2(t)$: 〃 商業立地量
$x_j{}^3(t)$: 〃 工業立地量
$x_j{}^4(t)$: 〃 地価
$x_j{}^5(t)$: 〃 道路関係の投資ストック量
$x_j{}^6(t)$: 〃 鉄道関係の投資ストック量
$x^7(t)$： t期における歳入
$u_j{}^1(t)$: t期のゾーンjにおける道路関係投資量
$u_j{}^2(t)$: 〃 鉄道関係投資量

x，uはそれぞれ状態量，政策変数を示す．作成した計量経済モデルは，数が膨大であるため，割愛する．また，ここでの計算例では計量経済モデルとシステム方程式が同形である．

目的関数については次式のように対象期間全体の歳入量の累計とする．

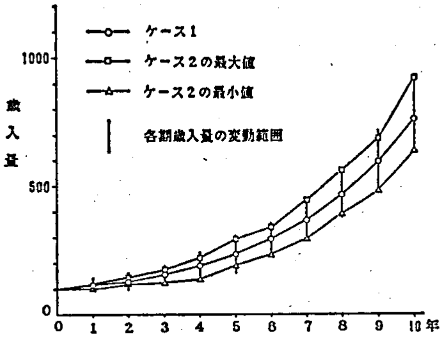
$$E(W_t)=\sum_{t=1}^{10}E(x^7(t)) \tag{23}$$

本章では，まず計画期間10年を通じて歳入を最大にするような鉄道，道路関係の投資パターンを求める．ついで4章で示した手順でシミュレーションを行い，不確定要素による経済変動の様子をみる．シミュレーションの回数は300回とする．

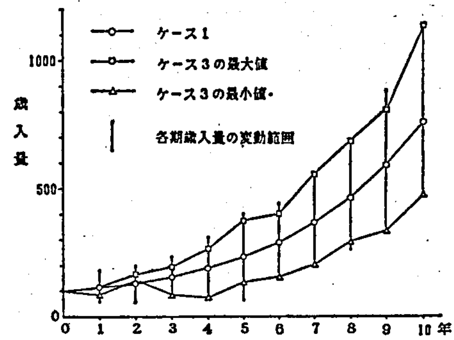
撹乱項 ξ_t の影響をみるため，次の3つのケースについて計算を行い比較，検討をする．

ケース1：撹乱項が変動しない場合．

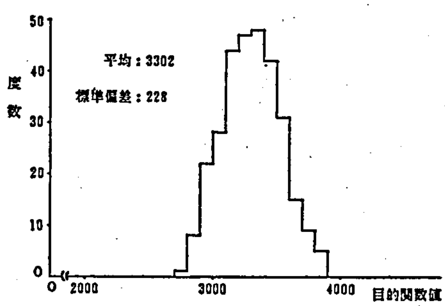
ケース2：撹乱項に，3σ が各変量の初期値の30％という比較的小さな分散を与えた場合．



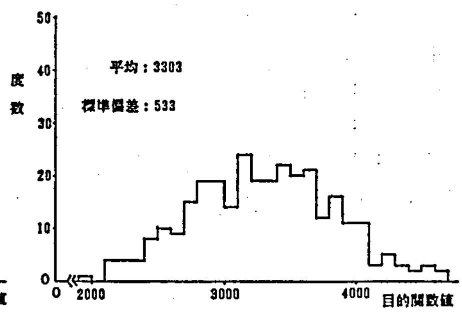
図—2　ケース1とケース2における歳入量の経年変化



図—3　ケース1とケース3における歳入量の経年変化



図—4　ケース2における目的関数値の分布



図—5　ケース3における目的関数値の分布

ただし，σは標準偏差．

ケース3：攪乱項に，3σが各変量の初期値の70%という比較的大さな分散を与えた場合．

シミュレーションにより得られた結果は図2～5である．

図－2は攪乱項の影響が比較的小さい場合の歳入量の経年変化である．このグラフを見ると，目的関数値が最大になるもの，あるいは最小になるものの経年変化と，当初の計画により予測されるケース1の経年変化と比較すると，大きな差はない．このグラフにおいては，第1期の標準偏差は9.9，第10期では56.6であった．図—3は攪乱項の変動が比較的大きな場合であり，第3期から当初の予定からは大きくずれていくことがわかる．また各期の歳入量の変動範囲も図—2と比較すると，かなり広いことがわかる．ここでの第1期の標準偏差は23.1，第10期では132.2となった．

図—4，5はそれぞれケース2，ケース3の目的関数値の分布を示している．図－4では平均3302，標準偏差228，となっている．図—5では平均3303，標準偏差533である．ケース1の場合の目的関数値は3302である．

6. むすび

本研究では，不確定要因が含まれる経済システムについて，確率制御理論を用いた最適公

共投資問題の定式化を行い，さらに不確定要因も考慮に入れたシミュレーションを構築し，各期の撹乱項の影響について調べた．その結果，次の点が明らかになった．

(1)システム方程式，制約条件，目的関数を線形とすると，決定された投資パターンは，システム方程式に撹乱項が含まれない場合と同じ投資パターンとなる．

(2) 撹乱項が大きい場合は当初の計画とは大幅に違った経済変動を示すことがある．

(3) 特に現実社会では毎期大きな撹乱項が入ってくる可能性があり，従来の制御理論で長期計画を立案することには問題がある．

今後の課題としては，パラメータの変動も考慮に入れた最適公共投資問題の定式化と，その場合の経済変動のシミュレーションを構築することである．

7. 参 考 文 献

(1) 経済審議会計量委員会編：経済計画のための多部門計量モデル―計量委員会第5次報告―

(2) 柳沢吉保；奥谷 巌：最適公共投資配分の統計的制御の適用性，長野工業高等専門学校紀要第17号 別刷 昭和62年1月

(3) 柳沢吉保：最適公共投資に関する基礎的研究，信州大学修士論文，昭和61年

(4) 藤本 熙：統計数理の基礎と応用，日刊工業新聞社 p275～279

(5) AOKI：Optimization of Stochastic Systems. ACADEMIC PRESS

(6) 宮武 修，脇本和昌：乱数とモンテカルロ法，森北出版