

切欠を有する回転円板のクリープ解析*

風間 悦夫**・山之上寛二***

1. ま え が き

タービンディスクのクリープ解析は、クリープ破断の推定、熱疲労とクリープの相互作用翼取付け部の結合応力のリラクゼーションなどを知る上で重要である。これらは熱弾塑性クリープ問題としてシミュレーションが可能であるが、構成方程式に関してクリープと塑性の間の連成効果は現在のところ知見は殆んど得られてない。また、熱疲労とクリープの相互作用に関する実験データも十分ではないようである。高温領域の材料の力学的相互作用に関する情報が重要視される状況にあるにもかかわらず、実験的データを得るのが困難であるのでシミュレーション手法に関心が高まる傾向がある。

本報告は回転体の熱疲労とクリープの相互作用のシミュレーションの準備段階であり、亀裂の存在、熱ひずみ、塑性ひずみの存在は仮定してないが定常温度下の遠心力によるクリープが計算されている。また増分形有限要素法を用いてクリープの時間依存性と有限変形による非線形性を含めた解析が可能である。なお、クリープ法則は状態方程式で表わされたものを適用している。回転体の温度が一樣でない時は、クリープの計算に温度分布の解析が伴うが、有限要素法の場合には、領域のメッシュ分割を兼用できる利点がある。

2. 増分形式の要素方程式

微小時間刻み Δt に対する要素の変位増分の分布を $\{\Delta U\}$ とし、 $\{\Delta U\}$ が要素の節点変位増分 $\{\Delta d\}$ で次式のように内挿されるものとする。

$$\{\Delta U\} = [N] \{\Delta d\} \quad (1)$$

ここに、 $[N]$ は形状関数といわれ、一般に平面応力、平面ひずみ問題では、座標 x, y の一次関数で表わすことが多い⁽¹⁾。また、 $\{\Delta U\} = [\Delta u, \Delta v]^t$ であり、 Δu は変位増分の x 方向成分、 Δv は y 方向成分である。

要素内のひずみ増分 $\{\Delta \epsilon\}$ は変位増分 $\{\Delta U\}$ を微分することにより次式で表わされる。

$$\{\Delta \epsilon_L\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2)$$

* 昭和52年10月 日本機械学会北陸信越支部長野講演会において発表

** 機械工学科 助教授

*** 機械工学科 教授

原稿受付 昭和53年9月18日

$$\{\Delta\epsilon_N\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon_L\} + \{\Delta\epsilon_N\} \quad (4)$$

ここに, $\{\Delta\epsilon\} = [\Delta\epsilon_x, \Delta\epsilon_y, \Delta\epsilon_{xy}]^t$ である. $\{\Delta\epsilon_L\}$ はひずみ増分の線形項であり, $\{\Delta\epsilon_N\}$ は非線形項である.

一方, ひずみ増分 $\{\Delta\epsilon\}$ は弾性ひずみ増分 $\{\Delta\epsilon_e\}$ とクリープひずみ増分 $\{\Delta\epsilon_c\}$ との和で与えられるものとする

$$\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon_e\} + \{\Delta\epsilon_c\}$$

であるが上式に式 (4) を代入すると次式が得られる.

$$\{\Delta\epsilon_e\} = \{\Delta\epsilon_L\} + \{\Delta\epsilon_N\} - \{\Delta\epsilon_c\} \quad (5)$$

応力増分 $\{\Delta\sigma\} = [\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\tau_{xy}]^t$ とひずみ増分の関係は次のように表わされる.

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\epsilon_e\} = [D](\{\Delta\epsilon_L\} + \{\Delta\epsilon_N\} - \{\Delta\epsilon_c\}) \quad (6)$$

ここに, $[D]$ は応力マトリックスといわれ, 等方弾性の場合は, 縦弾性係数 E とポアソン比 ν で次のように表わされる.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし, 式 (7) は平面応力の場合である.

式 (1), (2) より, ひずみ増分の線形項と変位勾配は次式のように書くことができる.

$$\{\Delta\epsilon_L\} = [B_L]\{\Delta d\} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \end{array} \right\} = [B_u]\{\Delta d\} \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \end{array} \right\} = [B_v]\{\Delta d\} \quad (10)$$

したがって, 式 (3) の $\{\Delta\epsilon_N\}$ も式 (9), (10) を用いて節点変位増分 $\{\Delta d\}$ の関数で書き表わすことができる. 平面応力問題を三角形一次要素を用いて解析する場合の具体的な $[B_L]$,

$[B_u]$, $[B_v]$ は、三角形要素の 3 個の頂点の座標を反時計回りに (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_m, y_m) とすれば

$$[B_L] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[B_u] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[B_v] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 A は三角形の面積である。

$$b_i = y_j - y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad b_m = y_i - y_j$$

$$c_i = x_m - x_j \quad c_j = x_i - x_m \quad c_m = x_j - x_i$$

なお、式 (1) の形状関数 $[N]$ は

$$[N] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & 0 & a_j + b_j x + c_j y & 0 & a_m + b_m x + c_m y & 0 \\ 0 & a_i + b_i x + c_i y & 0 & a_j + b_j x + c_j y & 0 & a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad a_j = x_m y_i - x_i y_m \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

である。

ある時刻の物体の形状を V_0 、荷重を $\{q_0\}$ 、応力状態を $\{\sigma_0\}$ で表わし、これらが既知であるものとする。これを基準状態とすると、微小時間刻み dt の増分変形後の仮想仕事の原理は次式で与えられる⁽²⁾。

$$\int_{V_0} \delta \{\Delta \epsilon\}^t (\{\sigma_0\} + \{\Delta \sigma\}) dV_0 = \int_{V_0} \delta \{\Delta U\}^t (\{q_0\} + \{\Delta q\}) dV_0 \quad (14)$$

ここに、 $\{\Delta q\}$ は時間刻み dt 間の荷重増分である。上式に式 (1)～(10) を代入し、節点変位増分の線形項のみを残し他の高次項を省略したのちに整理すると次式が得られる。

$$([k] + [k_G]) \{\Delta d\} = \{\Delta f\} + \{\Delta f_G\} + \{r\} \quad (15)$$

ここに

$$[k] = \int_{V_0} ([B_L]^t [D] [B_L]) dV_0 \quad (16)$$

$$[k_G] = \int_{V_0} ([B_u]^t [\sigma_0] [B_u] + [B_v]^t [\sigma_0] [B_v]) dV_0 \quad (17)$$

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(0)} & \tau_{xy}^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} & \sigma_y^{(0)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{df\} = \int_{V_0} [N]^t \{dq\} dV_0 \quad (19)$$

$$\{df_c\} = \int_{V_0} [B_L]^t [D] \{d\epsilon_c\} dV_0 \quad (20)$$

$$\{r\} = \int_{V_0} [N]^t \{q_0\} dV_0 - \int_{V_0} [B_L]^t \{\sigma_0\} dV_0 \quad (21)$$

$[k]$: 微小変位剛性マトリックス, $[k_G]$: 幾何剛性マトリックス

$\{df\}$: 節点荷重増分ベクトル, $\{df_c\}$: クリープ擬荷重ベクトル

$\{r\}$: 増分前の不平衡力ベクトル

である。回転体の場合には $\{q_0\}$, $\{dq\}$ は遠心力が含まれており、次式で与えられる。

$$\{dq\} = \frac{r}{g} (\omega^2 - \omega_0^2) \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\{q_0\} = -\frac{r}{g} \omega_0^2 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ここに,

ω_0 : 増分前の角速度, ω : 増分後の角速度, r : 回転体の比重量, g : 重力加速度である。

3. クリープ法則

状態方程式の形で表わされる定常クリープ法則は Norton の式がよく用いられているが次式のように書くことができる⁽³⁾。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} k \sigma_{eq}^{n-1} \sigma_{ij}' \quad (24)$$

$$k = 10^{-7} \sigma_{c7}^{-n} \quad (25)$$

ここに, $\dot{\epsilon}_{ij}$: クリープひずみ速度成分, σ_{eq} : 相当応力, σ_{ij}' : 偏差応力成分

n : クリープ指数, σ_{c7} : クリープ限度

である。非定常クリープの場合には次式のような時間硬化則を用いる⁽⁴⁾。

$$\dot{\epsilon}_c = m A \sigma_{eq}^n t^{m-1} \quad (26)$$

ここに, A , m , n はクリープ試験より得られる定数である。上式を von Mises の流れ法則を用いて多軸応力状態に拡張すると,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2 \sigma_{eq}} \dot{\epsilon}_c \sigma_{ij}' \quad (27)$$

となる。上式に式(26)を代入すれば非定常クリープひずみ速度成分が時間の関数で与えられる。時間刻み dt のクリープひずみ増分 $\{d\epsilon_c\}$ は式(24)または式(27)より

$$\{d\epsilon_c\} = \{\dot{\epsilon}_{ij}\} dt \quad (28)$$

であるから、これを式(20)に代入すればクリープ擬荷重ベクトルが計算できる。

4. 計 算 手 順

上に誘導された要素方程式は各増分段階の変形前の座標に関して表わされているので、有限変形問題を取扱う場合には、各増分段階ごとに各要素方程式の各項を計算し、これらを基準座標系に座標変換してから力学的に加え合わせるにより全体剛性方程式が得られる。微小変形クリープ解析の場合には、 $[k_0]$ は省略できて $[k]$ は不変であるから増分ごとの再計算や座標変換は不要である。

各時刻の変位、応力、ひずみは前段階までに得られているこれらの値に増分を加えることによって求めることができる。有限変形の場合には、増分計算後、節点の座標は節点変位増分を加えて修正し、要素の板厚もひずみ増分に従って変化する。これら要素形状の変化は微小であるからプログラクに組む際に、倍精度計算でなければならない。

なお、回転数が加速、減速の場合は式(26)、(27)の非定常のクリープ則を用い、定常回転の場合には式(24)の定常クリープ則を適用すればよい。

5. 数 値 計 算 例

図1に示される円板(部分)と図2のような切欠き付き円板(部分)を定常クリープ則を適用して計算した。図は対称性を利用して円板の解析領域のみ示してある。図1は16節点、14要素に、図2は40節点、53要素にメッシュ分割した。図2の場合は自由度の数は80であるが、剛性マトリックスの対称性とバンドマトリックスの性質を利用したガウスの消去法で計算すると32Kバイトのマシンのイン・コアで十分である。

インプットデータのうち材料定数などは下に示す。

$$E=1.8 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu=0.3, \quad \gamma=7.85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3, \quad g=9800 \text{ mm/s}^2, \\ \sigma_{cr}=7 \text{ kg/mm}^2, \quad n=5, \quad \text{回転数 } 7 \times 10^3 \text{ rpm}, \quad \text{想定温度 } 400^\circ\text{C}$$

である。時間刻み Δt は可変にして、1.0~50.0hr. の間の値をとるようにした。図3~5は計算結果をグラフに表わしたものである。図3は応力集中部の相当応力の変化を表わす。図4は図1のA-A部の応力分布であり弾性解(初期応力分布)とクリープで定常に近くなったときの分布を示す。図5は図2のB-B部の弾性解と定常状態付近の応力分布である。図4、5はいずれも相当応力で表わされている。

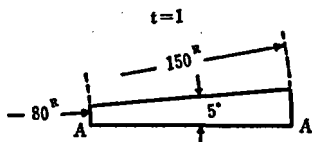


図1 円板

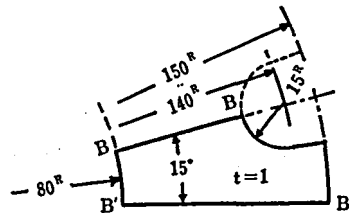


図2 切欠き付き円板

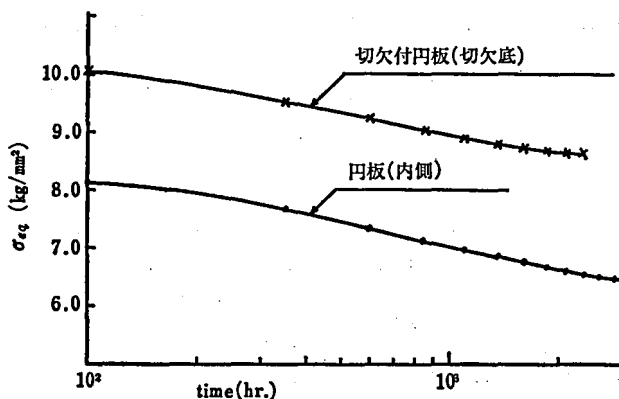


図3 円板の応力緩和

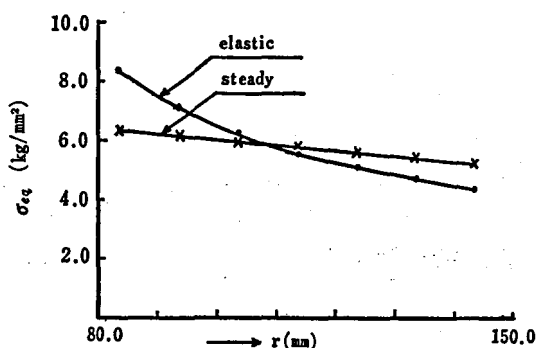


図4 円板の応力緩和

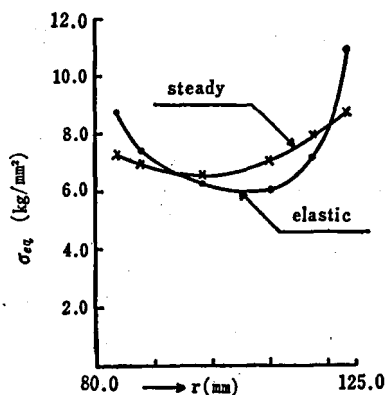


図5 切欠付円板の応力緩和

6. む す び

増分形有限要素法による回転体のクリープ解析を示した。平面応力問題では有限変形の影響は殆んど生じないので計算値は省略した。タービンディスクなどの翼取付け部のクリープ解析は3次元要素を用いて領域をメッシュ分割しなければならないが、3次元化は原理的には容易であるものの自由度が増すと時間依存の解析はインコアでの計算は困難になる。しかし、温度分布の解析や、熱ひずみ、塑性ひずみを含めた取扱いへの本解法の拡張は容易でありコンピュータに対する負担も3次元解析ほどではないことが予想できる。

参 考 文 献

- (1) L. J. セガーリンド, 「応用有限要素解析」 川井監訳, 丸善
- (2) 山田, 「塑性・粘弾性」 コンピュータによる構造工学講座, 培風館
- (3) F. K. G. オドクヴィスト, J. ハルト, 「クリープ強さの理論」 村上訳, 培風館
- (4) 矢川・宮崎, 「有限要素法によるクリープ解析の現状」 日本機械学会誌, Vol. 79, No. 691.
- (5) 平, 「熱応力と熱疲労」 日刊工業新聞社