線形代数指導の数学教育的意義について*

藤　原　　重　　幸**

はじめに研究の動機について述べる．次に今日の線形代数学教程の傾向と形式を調べる．続いて高専の数学教育における線形代数（行列の理論）指導の実例を示し，指導結果を種々の観点から分析する．さらに線形代数指導の本質すなわち数学教育としての意義を考究し，あわせて今後の指導における留意事項にも論及する．

1.　研究の動機とねらい

数学の諸部門の中で線形代数の近年における発達と普及ぶりはめざましい．高校以上の教育数学では解析学と並んで基礎的な地歩を占めるようになった．一面線形代数は現代化の色調で扱われる傾向があり，その指導に行き過ぎも感じられる．高専の場合，高校と同学年にてかなり程度の高い内容を系統的に短期間に取扱うことから生じる問題点が少なくない．教育内容と指導方法の改善のために諸データを整えることが望まれる．

ここでは高専２年次に対する指導をふまえて，線形代数の思考のわくぐみはどう作られるか，学習の抵抗は何かを調べる．加えて数学教育的意義を考え，この年次の教育内容の主テーマをどこにおくべきかをも検討したい．

2.　線形代数学教程の傾向と形式

2—1　線形代数学成立の年代と教程の傾向

線形代数ということばが数学の中で常用的になってきたのは，そう古いことではない．岩波数学辞典初版（1954）には索引の小項目にすらのっていないが，第２版（1968）には代数学の重要部門としての項目説明が現われる．LINEAR ALGEBRA をかかげた数学書は 1940年代に現われ始め，60年代に至って世界的に流布したとみられる．

ブルバキ数学史によれば，線形代数学の典型的な問題は関数 $f(x)=ax$ の値の算出，方程式 $ax=b$ の解法とかの１回の乗除で解くものでその起源は古いが，線形連立系を解くという実地計算家の要求に答えるために，行列表現 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の形でとらえて一般的解法の理論を成したのは新しいことに属するという．19世紀以来，数論と代数的研究を蓄積し，20世紀の初期に至って公理的方法と構造の概念が一体となって，現代的な線形代数学が形成されたのである．40年代に著わされた線形代数の書物の中で次の三つが代表的なものである．

N. Bourbaki : Algèbre, Ch2, Algèbre Linéaire. (1947)

I. M. Gel'fand : Lectures on Linear Algebra. (1948)

---

*　昭和52年８月　日本数学教育学会第59回総会，全国数学教育研究大会において発表

** 一般科数学　教授

原稿受付　昭和52年９月30日

А. И. Мальцев : Основы линейной алгеьры (1948)

ブルバキの書を1962年版によってみるとき，純粋数学的厳密構成であり，内容は加群，線形写像，テンソル積，線形空間，アフィン空間と射影空間から成り，独特な叙述は数学専攻者以外に一般受けする形のものではない．マリッェフの書は1956年版でみて，その冒頭で研究対象を行列，線形空間，代数形式におくとのべ，内容は行列，線形空間，一次変換，多項式の行列，ユニタリ空間とユークリッド空間，二次形式と双一次形式，双一次計量空間の一次変換，多重線形汎関数，テンソルとなっていて，かなり具体的でくわしいが，前半は叙述の平明さから普及に役立ち，以後の教程の典型になったともみられる．

ファン・デル・ヴェルデン「現代代数学(1930)」が出て，抽象代数学の広まる兆しが現われ，代数学はその後50年代に発達を示し，ア・ゲ・クローシュ「一般代数学(1960)」はその普及を強力に進める役割を果した．その後をうけて60年代には線形代数学の著名書が幾多現われた．ラング「線形代数学(1966)」は教養的かつ専門的の二面をそなえた形で，用語の解説は平易明快で，広く世に迎えられた．野水克己「線形代数の基礎(1966)」は米国でかかれた大学教養テキストで好評を博した．それは幾何学者の観点からのべられたものだが代数的方法と幾何学的応用のバランスがとれている．デイユドネ「線形代数と初等幾何」(1968)は純粋数学の立場から，現代数学の基本的な構造の一つとして扱い，公理的に組立てた線形代数の抽象的な理論を平面・立体幾何へ適用して見事な展開を果している．

2—2　わが国における線形代数学教程の形式

わが国での線形代数学のさきがけとしては，藤原松三郎「代数学(1929)」の中に古典代数学の集大成があり，当時での方列（行列）の理論を網羅している．一次変換の幾何学的扱いには力点をおいていない．藤原松三郎「行列及び行列式(1934)」になると著しく様相が変ってくる．行列式，行列，無限行列の理論を厳密にのべている．その序文の中では量子力学に行列理論が入り，物理学方面で行列論の知識が必要になったとのべ，無限行列の解析学への適用を示す先駆的なかき方がある．戦後の発達はめざましい．次にのべる．

荒又秀夫「行列及行列式(1946)」の内容項目はベクトル，行列，行列式，行列の対等，行列の変換，対称行列，直交行列，行列の解析であり，当時としては理論にかなりくわしくしかも行列から入る異色書であった．遠山啓「行列論(1952)」は行列を主に，行列式を従とし，変換を重視し，固有値問題を扱い，行列にノルムを入れ解析的扱いを広げ，関数空間への応用に歩を進めた．古屋茂「行列と行列式(1957)」の内容は行列，行列式，逆行列，行列の位(階数)，連立一次方程式，二次形式，固有値，正規行列．行列から入り行列主体で教程の範例となった．佐武一郎「行列と行列式(1957)」は大学教養テキストの普及版の意義をもっていた．その内容はベクトルと行列の演算，行列式，ベクトル空間，行列の標準化であり，改訂版（1973）ではテンソル代数を追加し書名を「線型代数学」と改めており，日米両国での著者の教育経験をふまえての初学者への周到懇切な説明である．

60年代に現われたものの中から次の四つをあげる．入江昭司「線形数学(1966)」は諸項目をほとんど含んでいて，実例を多くするかき方で，幾何的扱いはすぐれており，線形計画法の原理的解説がのっているのは行列の応用として興味がある．二階堂副包「経済のための線型数学(1961)」は初等線型代数学の経済学への応用にしぼって，非負行列，連立一次方程式の非負解，連立一次不等式についての基礎的事項を説明した画期的な書物．竹内啓「線形数

学(1966)」は経済学，統計学を学ぶ人のために，ベクトルを中心テーマとして線形代数を一通り説明した異色作である．斉藤正彦「線型代数入門(1966)」は数学的な考え方に慣れさせ，現代数学の構造に対する理解を深めるとともに線形代数に特有の技術を身につけることをねらうとのべ，項目は平面および空間のベクトル，行列，行列式，線型空間，固有値と固有ベクトル，単因子およびジョルダン標準型，ベクトルおよび行列の解析的取扱いとなっており，内容は密度高く，あとがきに線形代数の歴史解説がある．

森毅「現代数学と数学教育」によると，「わが国における線型代数教育の変化は1950年代の初期には行列式中心であったが，行列をおえてから行列式を扱う方向に変ってきた．また線型空間や線型写像が出発点に位置するようになった」といわれる．

以上の考察からすると，線形代数学教程の標準的内容は，行列の演算，行列式の諸性質，線形空間と一次変換，連立一次方程式の解法理論，行列の標準形化，主軸問題，特殊行列の性質，二次形式の理論ということになるであろう．

3. 線形代数指導の実際例

3—1 指導内容の要点

高専２年次数学の教育内容中の代数・幾何は標準的には週３時間として前期を行列式に，後期を行列にあてる．前者は空間幾何をベクトルと座標で考えるもので，行列式を所々にとり入れる関係上その名を冠している．後者は細目として，行列の諸定義，計算，正則性，階数，連立一次方程式の解法といった代数的部分と，一次変換，直交変換，平面および空間の座標変換といった幾何的応用の部分とから成る．いわゆる線形代数は後期半年間に集中的に扱われる．概して新概念の導入時には抵抗がある．指導上考慮した諸点を次に解説する．

(1) 行列概念　数学書による抽象的な定義と計算法則だけでは新しい数学の対象を理解させることはできない．具体的な意味をもって刻みこむ工夫がいる．買物の単価表，数量表と積として金額の算出，ベクトルの成分の横縦表示と内積の計算表現式，同時に多数のベクトルを連ねることから長方形の行列をとらえ，数としての表現の利点を知る．

(2) 逆行列　行列計算では加減・定数倍は容易だが乗法理解は一困難，計算図式を採用すれば機械的に行いえて積の型もとらえ易い．数論の構成では加群として零元とAに対し$-A$，乗法群として単位元とAに対しA^{-1}をつかむ．逆行列計算と正則行列の意義を理解させることは続く難関である．行列式が先行し，クラーメルの公式と余因数が必要である．

(3) 階数概念　定義は数学的でありその計算も理論的でつかみにくい．階数０，１，２と具体例で示す．概念導入の意味は連立一次方程式解法の一般論のためである．掃き出し法と合わせて行い，基本変形で零のみの行を除く意味の中に，独立式の個数として階数をつかむ．掃き出し法の図式からの解の能不能の識別と階数との関係，その時の解法を実際的に得る．

(4) 一次変換　$R^m \ni \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots\cdots x_m) \to \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n) \in R^n$ への (n, m) 形行列Aによる変換式 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という想定は表現上の簡便さはあっても内容的には抽象化は高度である．R，R^2，R^3 での対称，拡大，射影などでイメージを作る訓練がいる．線形性の把握は一次関数との類似で行い，図形の対応を問題にし面積，体積比を考える．

(5) 平面の座標変換　解析幾何の座標変換を行列表現で処理することはエレガントではあるが，初学者にはわかりにくい．原点の回りの回転にしぼる．二次形式の行列表現とある回

転座標変換による標準形化．固有方程式の誘導はきちんと行う．有心二次曲線の平行移動と回転の組合わせによる標準形化は行っても，一般二次曲線の分類に立入ることは益少ない．

(6)　空間の直交変換　一次変換を分類して直交変換を強調するのは，空間の主軸問題解法のためである．空間では原点のまわりの座標軸の回転では意味がつかめないから，二次形式の標準化を固有値問題になおすことは平面からの類推でよいが，計算は面倒，固有ベクトルも厄介である．二次曲面の分類は到底扱えないが，有心・無心の区別くらいは行う．

上記の内容は線形代数が初歩的な形で扱われるものとして典型的であろう．連立一次方程式の解法の理論を確立することは，中学以来の教育数学の総決算としての意味をもち，実用上からも望まれる．それに比べて一次変換の幾何への適用は代数の本筋から少しくはずれているが，数学の他への発展に結びつく実例としてとらえ，点の移動を行列表現することから生じる諸機能の便益を知らせることをねらう．

3—2　学習内容の把握実態（テスト結果）

(1)　行列の用語・概念の理解と計算力の修得について（実施月日10/30　人員80名）

問①（2，3）形零行列をかけ

②　4次の単位行列をかけ

③　$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$の転置行列をかけ

④　Eを2次単位行例としてAEは何形か

⑤　$\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4&6\\2&7&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3&3\\1&2&4\end{pmatrix}$

⑥　$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$

⑦　$\begin{pmatrix}4&2\\5&3\end{pmatrix}^{-1}$

⑧　$\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\-1&0&9\end{pmatrix}^{-1}$

①	正答率49	誤答率30	無答率21	⑤	正答率88	誤答率12	無答率 0　(%)
②	〃 64	〃 22	〃 14	⑥	〃 90	〃 8	〃 2
③	〃 74	〃 19	〃 7	⑦	〃 48	〃 46	〃 6
④	〃 41	〃 36	〃 23	⑧	〃 23	〃 67	〃 10

学習開始1カ月後の修得状況として，正答率でみて①～④が低いのは定義理解の不徹底，⑤⑥の機械的計算はよいが，⑦⑧の悪いのは理論性をふまえたものゆえ弱体を表わす．

(2)　連立一次方程式の解法と掃き出し法について（12/6　82名）

問　次の連立方程式を掃き出し法によって解け．

㋐　$\begin{cases}x-y+z=1\\x+y-z=1\\x-y-z=-1\\x+y+z=3\end{cases}$

㋑　$\begin{cases}x-4y+13z-11w=6\\2x-y+5z-8w=5\\3x+2y-3z-5w=4\end{cases}$

㋐　正答率66　誤答率34　無答率0　　㋑　正答率33　誤答率59　無答率8　(%)

掃き出し法には関心は強い，行列計算だけで解がでることに興味をもつが，㋑の悪いのは階数をよくつんでいないためか，中間点を与えて成就率は㋐79%　㋑54%となる．

(3)　平面上の一次変換の対応概念と表現について（①12/6　82名，②③1/19　78名）

問① 1次変換 $f: P(x,y)\to P'(x',y')$ として ㋕ $f(D)$の図示とその面積

$\begin{cases} x'=3x+2y \\ y'=2x+3y \end{cases}$ D: $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ ㋖ f^{-1} の行列表現

② 平面上の1次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ㋚ Dの像集合の形と面積

D:①と同じ ㋛ 逆変換

③ ㋟ $P(x, y)$ を (0, 0) に関し対象変換した $P'(x', y')$

㋠ $P(x, y)$ を (0, 0) の回りに60°回転した $P'(x', y')$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の表現

㋕	正答率61	誤答率33	無答率6	㋖	正答率22	誤答率74	無答率4	(%)
㋚	〃 49	〃 43	〃 8	㋛	〃 49	〃 39	〃 12	
㋟	〃 73	〃 26	〃 1	㋠	〃 66	〃 33	〃 1	

一次変換を平面上の一対一対応で考える表現の形式はつかめるが，逆変換になると理論的で逆行列計算とともに理解しにくいようだ．1カ月以上の時日をおいても余り進歩しない．

(4) 空間における一次変換と次元退化について (①1/19, ②3/3 の比較)

問 D: $0\leqq x, y, z\leqq 1$, $\mathbf{x}={}^t(x, y, z)$, 次を順に T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 次を図示せよ． ㋐ $T_1\mathbf{x}$ ㋑ $T_2\mathbf{x}$ ㋒ $T_3\mathbf{x}$

② 次を図示せよ． ㋕ $S_1\mathbf{x}$ ㋖ $S_2\mathbf{x}$ ㋗ $S_3\mathbf{x}$ (%)

㋐	正答82	誤答10	無答8	㋑	正答82	誤答9	無答9	㋒	正答4	誤答76	無答20
㋕	〃 63	〃 32	〃 5	㋖	〃 81	〃 14	〃 5	㋗	〃 28	〃 60	〃 12

一次変換とその表現行列の階数が像集合の次元とどう関係するか，時日を経ても著しい向上がみられない．次元退化は概念として難しい．

(5) 二次曲線の標準化について (①1/19 78名，②2/19 76名)

問① $x^2-8xy+y^2=15$ ㋐ 原点のまわりに回転し標準化せよ．㋑ グラフを画け．

② $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$ についてA, Bは左辺行列表示公式のもの．

㋕$|A|$ ㋖$|B|$ ㋗座標平面平行移動して $ax'^2+2hx'y'+by'^2+D=0$ とせよ．

㋘新座標原点のまわりに回転して $\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+D=0$ とせよ．

㋐	正答率24	誤答率55	無答率21	㋖	正答率49	誤答率43	無答率8	(%)
㋑	〃 1	〃 27	〃 72	㋗	〃 26	〃 48	〃 26	
㋕	〃 75	〃 22	〃 3	㋘	〃 22	〃 31	〃 47	

座標変換を図形的にとらえた上で行列による簡便な方法のよさをつかむ．形式のみを教えても物にならない．②は1次の項がありDを求めるのが厄介で計算ミスが多い．

(6) 二次曲面の標準化について (3/3 73名)

問2次曲面 $F_3(x, y, z)=2xy+2yz+2zx=1$ のとき次に答えよ．

①	F_3を行列表現せよ．	(正答 34	誤答 62	無答 4%)
②	①の中央の (3, 3) 形行列の固有値	(〃 25	〃 59	〃 16)
③	曲面の標準形 $Ax'^2+By'^2+Cz'^2=D$	(〃 16	〃 32	〃 52)
④	②の固有値中重根でないものの固有ベクトル	(〃 11	〃 11	〃 78)

わずか半年の行列学習でこの種の問題まで課することは酷かもしれないが，この問の完全正答者が8％いた．固有値だけでなく固有ベクトルまで求めることは難しいというべきだ．

4. 線形代数指導の問題点

4―1 アンケート調査の分析

前述の指導実例の対象学生81名に「数学学習実態調査」を3年次初め無記名にて行う．

Ⅰ数学の好嫌，Ⅱ2年次数学の内容別学力，Ⅲ行列理論の理解，Ⅳ行列理論の応用，Ⅴ行列理論の学習についての感想　以上5群20項目についてきく．抜粋で示す．（％）

Ⅰ	③中学時　代数・幾何どちらが好き	共に38	代数20	幾何32	他10			
	④高専2年次　微積・代数幾何どちらが好き	共に14	微積64	代幾10	他12			
Ⅱ	⑧ベクトル計算に自信がもてるか	はい	10	いいえ	60	わからない	30	
	⑨行列式計算（4次）に自信がもてるか	〃	27	〃	48	〃	25	
	⑩行列の加減乗計算に自信がもてるか	〃	42	〃	33	〃	25	
Ⅲ	⑪行列理論は概して難しいか	〃	45	〃	37	〃	18	
	⑫行列理論は概して興味がもてるか	〃	20	〃	57	〃	23	
	⑬連立1次方程式理論は理解できたか	〃	64	〃	14	〃	22	
	⑭1次変換は具体的に理解できたか	〃	20	〃	55	〃	25	
	⑮固有値から標準形の理論は理解できたか	〃	26	〃	52	〃	22	
Ⅳ	⑯行列による式表現は便利か	〃	50	〃	30	〃	20	
	⑰行列や行列式を他教科で利用するか	〃	20	〃	65	〃	15	

Ⅴ	⑪ではいと答えた者で		⑪でいいえと答えた者で	
	ア）考え方や計算めんどう	47	カ）ベクトルの理解を深めうる	23
	イ）今までの代数とちがう	36	キ）数学の研究対象を拡大できる	23
	ウ）式表現に慣れず	33	ク）数計算の本質に触れる	
	エ）内容が抽象的理解困難	67	ケ）写像が式と図形で結びつく	7
	オ）応用と結びつかない	39	コ）式表現簡潔さが魅力的	37

ここでⅡの学力の自信についての回答はテスト成績とは別の意味で参考になる．理論の理解や応用についての受取り方からは線形代数指導の内容と程度に問題があるようだ．

4―2 レポートの分析

学年末に「行列の理論を学んで」と題するレポートを提出させ，学習の意欲や理解の内面を観察する．総人数80名をテスト成績からA上位14名，B中位50名，C下位16名に三分して各グループの中で多くみられる意見を示すと次のようである．

A　連立1次方程式の解法のクラーメルの公式や掃き出し法はすばらしい．
1次変換の表現はかんたんでよい．　2次曲線の標準形は便利である．
行列の理論は覚えることが多く理解するのに苦労する．　実用不明で目標がもてない．
固有値の方法は難しい．　数式の簡素化で新しい理論を求めるこれからの課題と思う．
興味をもてる新しい分野．　今一度基礎からつみなおして理論を深めたい．

B　連立1次方程式まではよくわかり興味がもてた．　1次変換から難しくわからなくなる．　掃き出し法は面白い．　計算ミスが多い．　クラーメルの公式についても同様

である．　行列計算はできるのだが概念内容がつかめず応用がきかない．
微積分の方は使うから興味がもてるが行列は使えないので面白くない．
数文字が多くならぶので考えることよりも注意力が先に立ちうまくいかない．
１次変換は図形をきれいに処理でき公式からびっくりするような結果がでてくる．

C　便利や有用さが不明．　行列にどこかなじめず興味がわからない．
連立１次方程式の掃き出し法は便利だと思うが計算には工夫がいるようだ．
単なる行列の計算ならわかるがこと理論になるとサッパリつかめない．
公式が覚えられない．　こんな面倒で役に立たないことを時間をかけてやるべきか．
計算ミスが多い性質で行列は数学の中で最も自分に向いていない分野であった．

成績不振者には勉強についていけないだけの理由がある．全般的には数学のための数学で役に立たないことを強いられているとの反発が感じられる．

4—3　数学教育の内面的発達の分析

(1)　行列を数として把握する過程について

こどもが数の概念をいかにして把えるか，「具体的な事柄の取り扱いを通して数を正しく読みかきでき，数の構成について理解する」といわれる．行列は新しい数の概念であり，型が種類を分ち無数の型がある．総合体にあらわれる個々の要素を表示して作られる数一対応一分類はあっても順序（大小）はきめがたい．新しい数はイメージがないことには確実に発展的につかめない．数としての識別は特殊な名称のもの，対称・転置・対角行列などを何かの表現として理解することは経験が助けて次第についていく．

(2)　行列を代数構造の公理体系として把握する過程について

数である以上計算の規則がある．代数構造として考えるとき，加減は同一型のものの間で乗法は $(n,\ m)$ 形と $(m,\ l)$ 形の間で意味をもつ．これらはベクトルの加減，内積の定義の延長である．加法の零元，乗法の単位元，正則行列の逆元が現われる．乗法の非可換性は一つの発見である．代数構造が形式的に作られていくスピードは余りにも早く理解を確実にし難い．逆行列は具体的なものとしてでなく構造上の体裁であり重要性を認知していない．この年令で群や環をなすことを取上げても抽象的で事を複雑にし効果はうすい．

(3)　行列を写像概念で把握する過程について

行列を数とみるのは直観的思考とすれば，関数つまり写像とみるのは概念的思考である．$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ という式表現が媒介となって，線形性が浮び上り，一次関数即一次写像という概念の発展がある．ベクトルの対応とその拡大率を連想する写像概念が定着するには図形的な類推は必要である．平面上の格子形を平行四辺形に写しその測度計量の問題解決が創造的思考を刺激する．この関心のもち方が以後の学習に大きく影響する．かく行列を写像とみる思考が生ずれば，その積が写像の合成に発展しまた逆写像の存在条件正則性も問題になる．

(4)　一次変換が幾何的考察の識別を把握する過程について

線形写像としての把握以上に図形的変換をその表現式で区別する思考ははるかに程度の高いものである．こどもの考え方で空間の概念はどう発展するか．どんな大きさ，どんな形であるか．現象論的図形認識が概念的思考へ進むには一般論・特殊論の識別がいる．対称・回転変換は平面上ではつかみ易い．空間への発展はどうなるか．直交変換の定義が理解できるためには素材の蓄積もいる．次元が退化する一次変換はまたつかみにくい．スローテンポで

知覚的錯誤的試行段階を経て理解に達することができる.

(5) 行列を活用する方法・能力の発達の過程について

今日の思考心理学の教えでは，具体物の取扱いをしっかりやる，先を急がず行動・段階を固めて思考へいけば，とくに程度の高いことでなければ必ずできるという．行列を数と認識できた学生が現実にこれが用いられるものだと確認できるには，実際的・概念的両面から試されなくてはならない．連立一次方程式を掃き出し法で解きえたことは行列応用の発見であろう．逆変換の意義も同じである．現実問題への適用は思考の類推創意であるが原型的なものが数学の中に代数的一概念的なもの，幾何的一具象的なものとして存在する.

5. 線型代数指導の数学教育的意義

5―1 線形代数の活用における役割

前述のディュドネ「線型代数と初等幾何」は線形代数を数学教育の中で位置づけ，その重要性を強調した点で注目すべきものである．その序の中で「線型代数は連立一次方程式の古典的な理論はもちろん種々の実際の分岐を包含し，現代数学の最も中心的で有効な理論をなしていて，解析学，幾何学，位相数学を通じて数論から理論物理学に至るまで重要な応用に満ちている．初学者に出来るだけ早くこの理論の基本的な概念に親しませて，線形的思考を身につけさせるのがよい」といっている．ディュドネは「現代解析の基礎(1960)」にて線形代数によって在来の微積分を再編成するいき方が顕著である．さらに進めたものにスピヴァック「多変数解析学(1965)」があり，多変数微分の基本概念を線形写像による関数の局所近似でとらえる表現行列が諸機能を発揮している.

線形代数が解析学や幾何学に及ぼしつつある勢いは著しい．「数学解析（溝畑茂)」「常微分方程式論序説（白岩謙一)」は線形代数手法で微積分，線形微分方程式を明快に扱っている．近時発達の多様体の理論は在来の微分幾何や位相幾何の様相を一変させ，微分解析幾何微分位相幾何という分野も現われたが，根底には多次元空間の座標変換の局所線形化と円滑化がある．関数解析学は線形な関数空間の上での線形作用素の諸考察を土台にし築かれる解析学の分野で内容の多彩さは壮観である．「力学系の理論（白岩謙一)」「積分方程式入門（溝畑茂)」は線形代数ないし関数解析を駆使しての解析理論の鮮やかな展開である.

線形代数が数学以外の応用面でいかに発展しているか，それは今後の課題に属する，情報理論への応用．40年代にコンピュータが現われ，50年代にマトリックス法が生れた．コンピュータが機械的方法で処理しやすいのがマトリックス形の計算．有限要素法による構造解析の有力手段が「マトリックス法とコンピータ」にて成された．数学の行列が現実性に無縁な理論に終始して親しめないとき，行列・行列式計算のプログラミングを通して操作に慣れることは実用化への一歩である．線形計画法・シンプレックス法は行列表現で扱えて便益を与えるものであり，実生活への適用面では広いものがある.

5―2 線形代数指導の数学教育における役割

線形代数の指導が数学教育の全体の中において，どんな具体的役割と意義とをもっているかを換討することは大事である．次の5項目に分けてのべる.

ⓐ 行列計算は数計算の拡張的意義をもつ

数概念の拡張は実数から複素数で飛躍的に行われた．さらにn次元ベクトル，行列は数表

現として多面的であり，自由性と計算の内容の豊富さは注目に値する．

ⓑ 代数の公理体系を明確にする数学構成の範例

数学の構成をユークリッドの体系に依拠することが多すぎた．代数構造は数論の基本である．行列を要素として，非可換性，逆元その他主要概念を明確にする．

ⓒ 幾何的考察を代数的考察におきかえる手段を与える

初等幾何から解析幾何へ，さらにベクトル表現により多次元空間への発展を容易にした．計量の出発を内積にうつす代数的処理にて図形を究めることがスムースにいく．

ⓓ 空間の次元や基底の概念を的確に扱える

さまざまの線形空間の上に数学理論が成される，線形空間は一次独立元から作られる．線形変換による像または原像の次元の問題は線形代数の主要研究対象である．

ⓔ 数学の活用面で広い視野に立つことを可能にする

数学の諸部門に線形代数的手法が用いられ，代数，幾何，解析の境界はなくなる．自然科学，社会科学その他への線形代数による表現適用は重要なものになっている．

次に教育上における数学の価値について考える．数学教育の本来的目標として ①実用的，②訓練的，③教養的 の三つをあげるのが一般的である．数学全般のことを線形代数の指導という項目に限定して上記目標の順に意味づけをしてみる．

① 線形代数が行列を数（対象）とする広い意味の数学であることからみて，将来，研究の対象を拡大し，その表現上の長所が活用を広範囲（方法，操作，思考様式などが個人生活や社会生活に役立つ）に及ぼす可能性が大きい．

② 線形代数は一見素朴な一次方程式の理論の普遍化であるが，現代的概念の拡張から線形の本質を問いなおすものであり，内容（原理，方法，操作，思考などの学習が人間の心的特性を発達させる）は豊かであり試練にこと欠かない．

③ 代数の構造は現代数学の典型として真理性，審美性をそなえ，古典幾何の文化的意義にも劣らない価値をもっている．とくに線形代数は図形的特性の区別を示す形式を与える．このことは他の多くの分野の文化との有意義な関連でありその発展にも貢献する．

5—3 線形代数指導上の留意事項

高専の数学教育において，線形代数を一応まとまりのある形でとどめるとして，純粋数学上の重要性だけから扱って理解の困難を顧みず定形的におし進めることは好ましくない．教育数学の実際への適用は，指導対象の年令と学力の程度に応じて行われなければ効果はない．実用への考慮を払い，学習に意欲をもたせることは大切である．次の諸点に留意する．

①連立一次方程式の解法理論と技術修得を確立させる．

②数学や他へのことで行列使用の具体例を多くする．

③一次変換の理論を短期完成でわからせることは難しい．

④行列理論を固有値問題まで説くことは高度で抽象的でもある．

⑤線形の本質を理解させることを考えて内容の一般化で理解を混乱させない．

⑥線形代数の場合に計算と概念理解の難易とが必ずしも一致しない．

⑦線形空間の素材を蓄えて，高学年で今一度理論を発展させる．

従って，2年次という低学年でこれを読切りとすることは一考を要する．計算そのものにとくに困難はないとすれば，意味がわかり用いる態度が生じてくる時期をのがさないことで

ある．例えば，多変数微積分学や線形微分方程式またフーリエ解析の学習において，線形的表現の思考が求められる．線形代数は歴史が新しいだけに指導には，つねに適用面の創意が必要である．

参考文献

(1) 日本数学会編：岩波数学辞典　岩波書店　第1版(1954)，第2版(1968)
(2) ブルバキ：数学史(1969版　村田全他訳)　東京図書 1970
(3) ブルバキ：数学原論　代数　第2巻　(1962版金行壮二他訳)　東京図書 1970
(4) ア・イ・マリッェフ：線形代数学(1956版柴岡泰光訳)　東京図書 1960
(5) フアン・デル・ヴェルデン：現代代数学(1930版銀林浩訳)　東京図書 1959
(6) ア・ゲ・クローシュ：抽象代数学(1960版井関清志訳)　東京図書 1966
(7) ラング：線形代数学(1966版芹沢正三訳)　ダイヤモンド社 1971
(8) 野水克己：線形代数の基礎(1966版矢野健太郎訳)上，下　裳華房 1974
(9) ディュドネ：線形代数と初等幾何(1968版雨宮一郎訳)　東京図書 1971
(10) 藤原松三郎：代数学　第1巻，第2巻　内田老鶴圃 1929
(11) 藤原松三郎：行列及び行列式　岩波書店 1934
(12) 荒又秀夫：行列及行列式　東海書房 1946
(13) 遠山啓：行列論　共立出版 1952
(14) 古屋茂：行列と行列式　培風館 1957
(15) 佐武一郎：行列と行列式(1957)，増補版　線形代数学(1973)　裳華房
(16) 入江昭司：線形数学Ⅰ，Ⅱ　共立出版 1966
(17) 二階堂副包：経済のための線型数学　培風館 1961
(18) 竹内啓：線形数学　培風館 1966
(19) 斎藤正彦：線型代数入門　東京大学出版社 1966
(20) 森　毅：現代数学と数学教育　裳華房 1976
(21) ディュドネ：現代解析の基礎(1960版森毅訳)　東京図書 1971
(22) スピヴァック：多変数解析学(1968版斎藤正彦訳)　東京図書 1972
(23) 溝畑茂：数学解析(下)　朝倉書店 1973
(24) 白岩謙一：常微分方程式論序説　サイエンス社 1975
(25) 白岩謙一：力学系の理論　岩波書店 1974
(26) 溝畑茂：積分方程式入門　朝倉書店 1968
(27) 戸川隼人：マトリックス法とコンピュータ　培風館 1960
(28) 三本木茂夫他：有限要素法による構造解析プログラム　培風館 1960
(29) 森口繁一：線型計画法入門　日科技連 1957
(30) 波多野完治・滝沢武久：子どものものの考え方　岩波書岩 1963
(31) 波多野誼余夫・稲垣佳世子：知力の発達一乳幻児から老年まで一　岩波書店 1977
(32) 小林善一・井上義夫：数学教授法　共立出版 1957
(33) 中村正弘・寺田幹治：数学教育史　槇書店 1972