

多変数関数微分積分学の基本事項の解釈について*

藤 原 重 幸**

多変数関数の理論は1変数のそれに比べると、はるかに面倒である。

教育的見地でこれを見るとき、いくつかの問題点が見出される。

普通現われる関数の形にも分類らしいものがなく、関数の合成の概念も明確ではない。さらに多変数の場合の重要定理は、 ε - δ 式厳密理論にのみこだわっていると理解の見通しを悪くしてしまう。全微分の概念は一見模糊としているが、その機能面において価値をつかみ、多変数関数の近似理論に食いこめば、単純化するわち線形化という着想で、難解定理を理解し易いものに変えうる。今一つ、多変数関数の理論展開で、多次元量などの基礎概念をあいまいにして、ただ類推のみで一きょに一般化してしまういき方にも問題がある。

以上を要するに、本稿は教育的配慮において、線形代数的手法により多変数解析の理論展開を円滑化せんとする試みである。

1. 対象となる関数の集合の構成的なとらえ方について

微分法・積分法は関数に対する一種の演算であるから、現代数学の立場からすれば、その対象となる関数を明確にしておきたいわけである。通常、現われる関数は初等関数といわれるもので、定義は「有限個の実数あるいは複素数の関数で、代数関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数、あるいはそれらから合成関数を作ること有限回施してえられる関数」となっている。この定義の文章表現は簡単すぎて、多変数の場合内容が漠然としている部分もある。ここでは多変数の関数を、形の上で、式の集合としてとらえ、それを拡大して初等関数に近づけることを考える。例として2変数で行う。

基本関数の集合 $A = \{x^m y^n\} (m, n = 0, 1, 2, \dots)$ をもとにして、実係数の任意個数の一次結合 (実数 c_{mn} , 非負整数 p に対し $\sum_{m+n \leq p} c_{mn} x^m y^n$) の全体を \mathfrak{A}_0 とする。 \mathfrak{A}_0 はこの中で加減乗法が自由にできる。次に \mathfrak{A}_0 の任意2元 f, g に対し f/g の形のもの全体 \mathfrak{A}_1 を作る。 \mathfrak{A}_1 は四則 (加減乗除) 計算が自由にできる。 $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1$ である。

$B = \{x^m y^n, e^x, e^y, \sin x, \sin y, \cos x, \cos y\} (m, n = 0, 1, 2, \dots)$ をもとにして実係数の任意個の一次結合を作り、その上で加減乗法で閉じた集合として \mathfrak{B}_0 , \mathfrak{B}_0 の上でさらに除法を認めて四則で閉じた集合 \mathfrak{B}_1 を作る。続いて、 \mathfrak{B}_1 の中へ合成関数の考えを入れる。つまり、三つの関数 $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ に対して $f \circ (g, h)$ とは $f(g(x, y), h(x, y))$ の意味である。こうしてえられた関数の全体を \mathfrak{B}_2 とする。

基本関数の集合 B に $\sqrt{x}, \sqrt{y} (m, n = 2, 3, \dots), \log x, \log y, \sin^{-1} x, \sin^{-1} y, \cos^{-1} x,$

* 昭和51年8月 日本数学教育学会全国数学教育研究岐阜大会において発表

** 一般科数学助教授

原稿受付 昭和51年10月8日

$\cos^{-1}y$ など 1 変数の場合の逆関数をつけ加えて、集合 C を作り、 B のときと同様の操作で関数の集合 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を作る。 $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2, \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ である。

ここでえられた \mathcal{A}_0 はいわゆる整式（整関数）の集まりで、関数の集合としては最も小さいが、 R^2 全域で定義され、実用価値は大きい（無限回連続的の微分可能であり、ワイエルシュトラスの定理から連続関数の近似に用いられるなど）、 \mathcal{A}_1 は有理関数の集合である。 \mathcal{C}_2 は上記定義の初等関数とは完全に一致しないが微積分学の対象として十分な大きさをもつ。

関数の一般的定義—ディリクレ式—との関連については、 R^2 での定義域を有限個に分割したとき各区分領域で \mathcal{C}_2 の形になっていれば、拡張された初等的関数とみることにする。

2. 多変数関数の写像としてのとらえ方について

前節の関数の集合の拡大では、関数の合成の概念が大きな役割を果たしている。合成は加減乗除よりはるかに一般的な操作である。ここでは合成概念の明確化のために、多変数の関数を写像の考えでとらえることにする。

ユークリッド空間 R^n （ここでは n 個の実数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) の全体とみておく）の各点に R^m のある点を対応させる規則を R^n から R^m への写像（関数、くわしくは n 変数のベクトル値関数）という。関数 f によって R^n の点 x に対応する R^m の点を $f(x)$ とかき、 $f: R^n \rightarrow R^m$ で示す。

- i) $R^n \rightarrow R (n \geq 2)$ のとき、 R^n の部分集合から R への写像、これが n 変数の関数である。この関数の全体は前節の \mathcal{C}_2 を含むようなはるかに広いものである。
- ii) $R \rightarrow R^n (n \geq 2)$ のとき、 $R \ni t$ に対し n 個の 1 変数関数 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ があって、 n 次元ベクトル $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ が定まるの意である。
- iii) $R^n \rightarrow R^m (m, n \geq 2)$ 一般の場合である。 $R^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in R^m$ ここで $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) (i=1, 2, \dots, m)$ 。点 x が R^n の領域 A を動くとき点 $y(f(x))$ が R^m の領域 B を作る。

写像の合成。 $f: A \rightarrow R^m, g: B \rightarrow R^p (B \subset R^m, A \subset R^n)$ に対して、合成写像 $g \circ f$ とは $g \circ f(x) = g(f(x))$ のことである。くわしくいうと $f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$, $g(y) = (g_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, g_p(y_1, y_2, \dots, y_m))$ のとき $g \circ f(x) = (g_1(f_1, \dots, f_m), \dots, g_p(f_1, \dots, f_m))$ 。

写像の集合はその要素の間の合成によって、著しく要素を増し拡大する。複雑な写像を簡単な形の写像の合成に分解することは屢々必要になる。

3. 多次元空間の位相と計量について

$f: R^n \rightarrow R^m (m, n=1, 2, 3)$ だけを考えていれば、 R, R^2, R^3 の位相は常識的なユークリッドの距離であり、その中の図形の測度・計量（長さ、面積、体積、角度）なども明らかで一々ことわるまでもないが、 $R^n (n \geq 4)$ となるとこれらについて明確な定義が必要である。1 変数の延長として多変数の関数の連続性を考えるとき、 R^n に何らかの位相の導入をする。しかも微分可能性という考察のためには、 R^n に距離概念も要求される。距離空間の構成の基礎としてはノルムの定義があればよい。すなわち $R^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対してノルム $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ を定義する。これより $R^n \ni x, y$ の距離として $d(x, y)$

$=\|x-y\|$ とする。 R^n のノルムは、実は内積の考えから導かれるもので、長さ、距離、角度の概念はすべて内積を媒介として、 R^3 からの拡張概念であり、直交性が基調をなしている。それゆえ、測度—体積—は、 $A \subset R^n$ 、 A を閉方体（シュワルツは敷石と呼ぶ） $[a_1, b_1,] \times [a_2, b_2,] \times \dots \times [a_n, b_n,]$ の体積を $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$ で定義する。

$f: A \rightarrow R (A \subset R^n)$ なる n 変数関数の領域 A における多重積分の定義は次のようになる。 $[a_i, b_i]$ を N_i 個に分割することを P_i で示し、 $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)$ で、この閉方体を $N=N_1N_2\dots N_n$ 個の小閉方体に分割することとする。任意小閉方体を S 、その体積を $v(S)$ 、 f が連続のとき、 S 内の任意の点 s に対し $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_S f(s)v(S)$ ($N \rightarrow \infty$ は閉方体の各辺を無限小分割) が存在することが、コーシーの定理から保証されて、これを記号で次のようにかく。

$$\int_A f, \int_A f(x)dx \text{ または } \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2\dots dx_n \text{ など.}$$

閉方体でない閉領域 $A \subset R^n$ の測度は R^2 におけると同様に定義する。閉領域の積分も同様、 $f: A \times B \rightarrow R (A \subset R^n, B \subset R^m)$ とともに閉領域) が連続のとき、積分の累次化を保証すると同時に、積分の順序変更を可能にするものとして、次のフビニの定理がある。

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y)dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y)dx \right) dy, \quad x \in A, y \in B.$$

測度と積分の定義からの上記定理の確認はきわめて基本的なことである。

4. 全微分概念とその機能について

2 変数関数 $z=\varphi(x, y)$ を例にとる。点 (x, y, z) が空間曲線を作るような場合、 t が R 内の区間を動き $x=x(t), y=y(t)$ 従って $z=z(t)$ であって、微分の公式として

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

これを簡単にして

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

とかくのは形式である。

上で x, y を独立変数にとれば、 x, y の微小増分 $\Delta x, \Delta y$ に対する z の増分 Δz が $\Delta z = \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y) \approx \varphi_x \Delta x + \varphi_y \Delta y$ となることから $\Delta x=dx, \Delta y=dy$ とし $dz = \varphi_x dx + \varphi_y dy$ とおくことは $\Delta z \approx dz$ という近似式上重要な意味をもつ。全微分を行列で表現すると合成関数の場合つかみ易くなる。これを次に示す。

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y) \\ x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases} \text{ のとき } dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

この表現は $z=f(x, y)$, $x=g(u, v)$, $y=h(u, v)$, $u=p(s, t)$, $v=q(s, t)$ のとき

$$dz = (z_x \ z_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix}$$

のように発展して便利である。

ここに現われる偏導関数の要素をもつ各行列がそれぞれの多変数関数の「ヤコビの行列」なのである。上記の R^2 のベクトル変量 (du, dv) に対し全微分 dx は R の変量である。

$f: R^n \rightarrow R$ なる関数の全微分を求めることは、1変数関数の場合の微分を求めること一近似理論の拡張とみてよい。 $y=f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Dif=\partial f/\partial x_i$ として

$$\begin{aligned} dy &= D_1 f dx_1 + D_2 f dx_2 + \dots + D_n f dx_n \\ &= (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^t \end{aligned}$$

と行列表現でき、 $(1, n)$ 行列 $(D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)$ を f のヤコビ行列、微分 Df とかく。やや厳密にいうと、 f の定義域内の $x, x+h$ ($\|h\|$ 微小) に対し、 $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ が存在して $f(x+h)-f(x)=a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n + o(\|h\|)$ (ノルムは R_n で) (o はランダウの記号) とかけるとき、 f は x で全微分可能といい、 $a_i = D_i f(x)$ となる。

$f: R^n \rightarrow R^m$ なるベクトル値関数については $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ として、全微分の表現

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & \dots & D_n f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m & D_2 f_m & \dots & D_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad A=(Dif_j(x)) \ (m, n) \text{ 形}$$

をうる。前記同様、 R^n の f の定義域内 $x, x+h$, ($\|h\|$ 微小) に対し、上記行列 A が存在して $\|f(x+h)-f(x)-A(h)\|=o(\|h\|)$ となるのである。この A を f の微分といい Df でかき、この A は (m, n) 形ヤコビ行列とよばれる。(左、右辺のノルムは R^m, R^n でとる)

5. 一対一対応の判定とヤコビアン の役割について

$\varphi: R^n \rightarrow R^m$ なる写像の中で $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ かつ $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ をみたすものを線形写像という。ここで λ は任意実数、 x, y は φ の定義域内の任意2元とする。

この線形写像 φ に対して (m, n) 形行列 A が一意に存在して $\varphi(x)=Ax$ と表わされることは、線形代数学の理論として大事である。

上記でとくに $m=n$ のとき φ を n 次元線形変換という。線形変換 $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ が一対一対応であれば、任意の $y \in R^n$ に対し $\varphi(x)=y$ となる $x \in R^n$ が定まり、逆変換 φ^{-1} が定義される。このことを簡潔に述べると次のようになる。

線形変換 φ に対応する行列を A とすると φ^{-1} が存在する $\iff A$ が正則である。 ($|A| \neq 0$)

一般の場合として、線形でない変換 $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ について考える。 $n=3$ を例にとる。

$\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ を線形変換で近似することを考える。変換 φ の定義域は $R^3 \ni (u, v, w)$ を含む開集合とする。 $\varphi: (u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$, $x=f(u, v, w)$, $y=g(u, v, w)$, $z=h(u, v, w)$ と

して、全微分の行列表現 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$ をうる。

点 $(u, v, w) \rightarrow$ 点 (x, y, z) の微小近傍の対応として $\Delta x = dx, \Delta y = dy, \Delta z = dz$ とみなして φ を近似して, 点 $(u+du, v+dv, w+dw) \rightarrow$ 点 $(x+dx, y+dy, z+dz)$ と考えれば, 対応点の各々をむすぶベクトルの成分 (du, dv, dw) から (dx, dy, dz) への変換を上記行列で行ったことになる. 点 (u, v, w) の局所近傍では行列の各要素は定数とみている. この変換の行列—ヤコビの行列—の正則性の保証がヤコビアン $J \neq 0$ によってえられる. すなわち点 (x, y, z) の微小近傍において $J \neq 0$ となれば, 点 (u, v, w) の近傍に (x, y, z) の適当な近傍が対応して存在し, その両者が一対一となるのである.

この理論は一般の n に対してそのまま成立つ. このようにヤコビの行列は変換の線形近似上大切であり, またそれが線形性ゆえに一対一の判定における役割も著しい.

6. 重積分の変数変換とヤコビアンの意味について

まず準備をする. 線形変換 $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ は次の行列表現とし, 変換行列 A は正則とする.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (|A| \neq 0)$$

$R^3 \ni (u, v, w)$ の $0 \leq u \leq h_1, 0 \leq v \leq h_2, 0 \leq w \leq h_3$ なる直方体 D の φ による像集合 $\varphi(D)$ の体積を求める. 辺 $0 \leq u \leq h_1, v=w=0$ は $x/a_1=y/a_2=z/a_3=u$ なる R^3 の線分に移る. 他にも同様にして $\varphi(D)$ は完全に R^3 の平行6面体に移される. その体積は3ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)h_1, \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)h_2, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)h_3$ を3辺とするのでスカラー3重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |A|h_1h_2h_3$ の絶対値で与えられる.

次に重積分の変数変換の一般理論を扱うことにする. 例として3重積分をとる.

空間 R^3 の有界閉領域 V (物体) での連続関数 $\rho(x, y, z)$ (密度) の3重積分 (全質量)

$$\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

を求めるのに, 積分変数 x, y, z を別の変数 u, v, w に直すこ

とを考えるのである. 変換 $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ は $(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$ で, f, g, h は前節同様. 上記積分は領域 V の微小分割は自由で $\lim \sum \rho dV$ の存在は V の可測性と ρ の一様連続性 (閉領域での連続) から保証されている. φ によるヤコビアン $J \neq 0$ を仮定しておくとき, 対応 $A \ni (u, v, w) \leftrightarrow (x, y, z) \in V$ は一対一である. 頂点 (u, v, w) の微小直方体 $[u, u+du] \times [v, v+dv] \times [w, w+dw]$ の体積は3辺の積で $du dv dw$ であり, これが V の微小部分 dV に一対一に写像される. dV を頂点 (x, y, z) の微小平行6面体で近似することを前節の φ の線形近似と上記の線形変換による直方体の像集合の性質から考える.

変換 φ によって u の微小変量 du に対し $(u+du, dv, dw) \rightarrow (x+dx, y+dy, z+dz)$ として $dx = f_u du + f_v dv + f_w dw$ にて $dv = dw = 0$ だから $dx = f_u du$ となる. 同様に $dy = g_u du, dz = h_u du$ つまりこのときベクトル $(dx, dy, dz) = (f_u, g_u, h_u) du$ である. $(u, v+dv, w), (u, v, w+dw)$ に対するものとして $(f_v, g_v, h_v) dv, (f_w, g_w, h_w) dw$ がえられ, 準備のときの線形変換と同様に, スカラー3重積をとって dV の体積近似として $|J| du dv dw$ がでる. ここで積分の定義式 $\lim \sum \rho dV$ にて dV をおきかえて, 変換公式

$$\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(A)} \rho(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) |J| du dv dw$$

上では $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ のときを述べた ($R^2 \rightarrow R^2$ は簡単すぎる), n 変数の一般の変換 $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ のときは帰納法にて行うわけだが, $n=3$ の成立がえられているので $n=4$ の場合に上記準備と同様に線形変換 φ の考察について述べるにとどめる.

線形変換 $\varphi: R_1^4 \rightarrow R_1^4$ ($R^4 \rightarrow R^4$ にて独立変数 x , 従属変数 y を強調してかく)

$$\varphi: y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (1 \leq i \leq 4, |\det a_{ij}| \neq 0)$$

R_1^4 の閉方体 $0 \leq x_i \leq h_i (1 \leq i \leq 4)$ を D とする. R_1^4 での像集合 $\varphi(D)$ の体積を求める. 次の変換を媒介にする. $|\det a_{ij}| \neq 0$ だから変数 x_i は記号を適当につけかえて $a_{44} \neq 0$ とし

$$\varphi_1: z_i = x_i (1 \leq i \leq 3), \quad z_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$$

$$\varphi_1^{-1}: x_i = b_{i1}z_1 + b_{i2}z_2 + b_{i3}z_3 + b_{i4}z_4 \quad (1 \leq i \leq 4)$$

を作り, $\varphi \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2$ とする. これに上式を代入して計算すると簡単になり,

$$\varphi_2: y_i = c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + c_{i3}z_3 + c_{i4}z_4 \quad (1 \leq i \leq 3), \quad y_4 = z_4.$$

これらを組合わせて $\varphi_2 \circ \varphi_1 = (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 = \varphi \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1) = \varphi$ となる.

各線形変換 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ は $(4, 4)$ 形行列で表わされているので, 行列の合成を考えれば

$$|\det \varphi| = |\det \varphi_2| |\det \varphi_1|. \quad \text{また } \varphi(D) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(D) = \varphi_2(\varphi_1(D)).$$

変換の行列表現を示すと,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

各線形変換による像集合の体積を考える. R^4 での体積を記号 v で表わす.

$$v(\varphi_1(D)) = \int_1 dz = \iiint_{0 \leq z_i \leq h_i} dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 = |a_{44}| v(D) = |a_{44}| h_1 h_2 h_3 h_4$$

$$v(\varphi(D)) = \int_1 dy = \int_{D(y)} dy_4 \iiint_{D(y_4)} dy_3 dy_2 dy_1 = \int dz_4 (|\det c_{ij}|) \iiint_{D(z_4)} dz_3 dz_2 dz_1$$

上の2式より $v(\varphi(D)) = |\det c_{ij}|_{1 \leq i, j \leq 3} v(\varphi_1(D)) = |\det c_{ij}|_{1 \leq i, j \leq 3} |a_{44}| v(D)$
 $= |\det \varphi_2| |\det \varphi_1| v(D) = |\det \varphi| v(D) = |\det a_{ij}|_{1 \leq i, j \leq 4} v(D)$ をうる.

参 考 文 献

- 日本数学会編：岩波数学辞典（第2版）岩波書店（1968）p. 678
 入江昭二：線形数学I 共立出版（1966）pp. 79~86, p. 90
 白岩謙一：力学系の理論 岩波書店（1974）pp. 49~54
 ディユドネ：現代解析の基礎I 東京図書（1971）pp. 151~152, pp. 176~178
 シュワルツ：物理数学の方法 岩波書店（1966）pp. 20~23
 佐武一郎：線型代数学 裳華房（1974）pp. 16~21
 スピヴァック：多変数解析学 東京図書（1972）pp. 12~15, p. 37, pp. 52~54
 溝畑 茂：数学解析（下）朝倉書店（1973）pp. 467~470
 三村征雄：微分積分学(II) 岩波書店（1973）pp. 210~221