

# ボイラ水冷壁の定常熱応力\*

風間 悦夫\*\*・山之上寛二\*\*\*

## 1. ま え が き

最近のボイラ蒸発管はきびしい蒸気条件におかれている。その設計、材料選定にあたりまず、定量的に正確な内部温度分布を求める必要がある。そのためには伝熱特性についての十分な知識が要求されるが、本研究はメンブレン水冷壁の定常温度分布および定常熱応力を蒸発管内面の熱伝達率が温度に依存するものとして取扱うために、Jens and Lottes の実験式<sup>(1)</sup>を用いて数値解析をしたものである。この場合、非線型熱伝導問題となるが、筆者らは出発点を重みつき残差法においた有限要素法を用いて分布系から離散系への変換をおこなっている<sup>(2)(3)</sup>。

なお、このような場合の温度分布は、以前、三浦氏が管内面の熱伝導率を一定と仮定して線型差分解析している<sup>(4)</sup>。

## 2. 基礎方程式と計算方法

### 2・1 定常熱伝導方程式

物体内部の定常熱伝導を支配する偏微分方程式は直角座標系のテンソルを用いて表わすと

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \bar{Q} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

一般に物体の表面  $C$  は次のような各種の境界  $C_i$  をともなう、すなわち

$C_1$ .....輻射熱負荷境界                       $C_2$ .....熱伝達境界  
 $C_3$ .....断熱境界                                 $C_4$ .....温度固定境界

ここに  $C = \sum C_i$  の関係がある。

それぞれの境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \dots\dots\dots k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = \bar{q} \\ C_2 \dots\dots\dots k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = \alpha \theta \\ C_3 \dots\dots\dots k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = 0 \\ C_4 \dots\dots\dots \theta = \bar{\theta} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに  $\theta$  .....温度差 ( $\theta = t - t_0$ )                       $\bar{Q}$  .....内部発熱率

---

\* 昭和49年10月、日本機械学会北陸信越支部長野地方講演会において発表  
\*\* 機械工学科講師      \*\*\* 機械工学科教授  
原稿受付 昭和50年9月25日

$t$ .....物 体 温 度	$\bar{q}$ .....境界面熱負荷
$t_0$ .....基 準 温 度	$\alpha$ .....熱 伝 達 率
$k_{ij}$ .....熱 伝 導 率	$n_i$ .....方 向 余 弦

熱伝達率 $\alpha$ は温度の関数で、次のような Jens and Lottes の実験式が知られている。

$$\alpha = (ep/63)^{4/3} / 8 \cdot 2^4 (\text{kcal/cm}^2 \text{h}^\circ\text{C}) \quad \text{.....(3)}$$

ここに  $p$  は管内蒸気圧 ( $\text{kg/cm}^2$ ) である。

次に分布系で表示されている熱伝導の支配方程式(1), (2)を離散系の支配方程式に直すために、Weighted Residual 法 (重みつき残差法) にもとづく Finite Element Method (有限要素法) を用いる。

まず式(1)の左辺を  $R$  とおき、重み関数  $\varphi_m$  として次のように重みつき残差を零とおく。

$$\int_v R \varphi_m dV = 0 \quad \text{.....(4)}$$

上式に Green の積分公式を用いることにより

$$\int_v k_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dV - \int_S k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i \varphi_m dS - \int_v \bar{Q} \varphi_m dV = 0 \quad \text{.....(5)}$$

がえられる。上式から境界条件(2)を用いて

$$\int_v k_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dV - \int_{C_2} \alpha \theta \varphi_m dS - \int_v \bar{Q} \varphi_m dV - \int_{C_1} \bar{q} \varphi_m dS = 0 \quad \text{.....(6)}$$

がえられる。

次に有限要素法による系の離散化をおこなうために、支配方程式の定義領域 (この例では空間) を適当に要素分割し、任意の要素内の温度分布を

$$\theta_e = \varphi_n \theta_n \quad (n \text{ は総和規約にしたがい、要素のもつ節点の数だけ変化する}) \quad \text{.....(7)}$$

で表わされるものと仮定する。ここに  $\varphi_n(x)$  は形状関数とよばれ、 $\theta_n$  は  $\theta$  の節点値である。(7)を(6)に代入すると次式がえられる。

$$h_{mn} \theta_n - q_m = 0 \quad \text{.....(8)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } h_{mn} &= \int_e k_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} dV - \int_{C_2} \alpha \varphi_m \varphi_n dS \\ q_m &= \int_e \bar{Q} \varphi_m dV + \int_{C_1} \bar{q} \varphi_m dS \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(9)}$$

添字  $e$  は要素の領域をあらわし、 $C_1$ ,  $C_2$  に関する積分はそれぞれの境界に接する要素のみ意味をもつものとする。

領域内に含まれる全要素について(9)を計算し、(8)の総和を求めることにより、(6)に対しての次のような離散化された式がえられる。

$$h_{rs} \theta_s - q_r = 0 \quad \text{.....(10)}$$

$r, s=1, 2, \dots$ , 全節点数と変化させることにより、系の支配方程式は次のような連立方程式で表示されることになる。

$$H\theta = Q \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに  $H$  は熱伝導マトリックス,  $\theta$  は節点温度ベクトル,  $Q$  は節点熱負荷ベクトルである.

## 2・2 熱弾性方程式

表面力, 物体力の作用を受ける弾性体は次のような仮想仕事の原理が成立している.

$$\int_v \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_v \bar{F}_i \delta u_i dV + \int_s \bar{P}_i \delta u_i dS \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに  $\sigma_{ij}$ .....応力成分  $\bar{F}_i$ .....物体力成分  $\delta u_i$ .....仮想変位成分  
 $e_{ij}$ .....ひずみ成分  $\bar{P}_i$ .....表面力成分

を表わすものとし, 添字  $i, j$  は直交座標系のテンソル演算の定義にしたがうものとする.  
 一方, 構成方程式は Duhamel-Neumann の法則にしたがうものとすると

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad \dots\dots\dots(13)$$

ただし  $E_{ijkl}$ .....弾性係数  $\beta_{ij}$ .....熱弾性係数 である.

(13)を(12)に代入すると

$$\int_v E_{ijkl} e_{kl} \delta e_{ij} dV - \int_v \beta_{ij} \delta e_{ij} \theta dV = \int_v \bar{F}_i \delta u_i dV + \int_s \bar{P}_i \delta u_i dS \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる. また, 変位-ひずみ関係式は微小ひずみに対して次式で与えられる.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

任意要素内の変位成分の分布を

$$u_i = \phi_{im} d_m \quad (\text{添字 } m \text{ は総和規約にしたがう}) \quad \dots\dots\dots(16)$$

と仮定する. ここに  $\phi_{im}$  は形状関数で座標  $x_i (i=1, 2, 3)$  の関数である. また  $d_m$  は節点の変位をあらわし,  $m$  は 1 個の要素のもつ全節点の自由度の数だけ変化する.

(15), (16)を(14)に代入すると次式がえられる.

$$k_{mn} d_n \delta d_m = f_m \delta d_m \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに

$$k_{mn} = \int_v \frac{1}{4} E_{ijkl} \left( \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_{jm}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \phi_{kn}}{\partial x_l} + \frac{\partial \phi_{ln}}{\partial x_k} \right) dV \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$f_m = \int_v \frac{1}{2} \beta_{ij} \theta \left( \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_{jm}}{\partial x_i} \right) dV + \int_v \bar{F}_i \phi_{im} dV + \int_s \bar{P}_i \phi_{im} dV$$

領域内の全要素について(18)を計算し, (17)の総和を求めることにより

$$k_{rs} d_s \delta d_r = f_r \delta d_r \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに  $\delta d_r$  の任意性から(19)より次式がえられる.

$$k_{rs} d_s = f_r \quad \dots\dots\dots(20)$$

$r, s$  を全節点の総自由度の数だけ変化させることにより, 次のような離散化された変位に

関する連立方程式がえられる。

$$Kd=F$$

.....(21)

### 2・3 計算方法

式(9)は温度の関数である熱伝達率 $\alpha$ を含むから、(11)は非線型方程式である。この式から節点温度 $\theta$ を計算するために反復計算法の一つである Gauss-Siedel 法を用いた。今、反復回数を $r$ とすると、(11)を

$$H^r \theta^{r+1} = Q \quad \text{.....(22)}$$

と修正する。逆行列計算の反復によって $\theta$ を求めるのは(22)のままのアルゴリズムでは収束値をうるのは困難であることを確認した。仮に収束するとしても計算時間の浪費はまぬがれないと思われる。

筆者らは Gauss-Siedel 法における加速係数 $\omega$ を熱伝達境界上の節点温度を計算するときには  $0.0 < \omega < 0.5$  を、他の節点温度のときには  $1.0 < \omega < 2.0$  にすることによって速やかに収束することを数値実験的に確認した。

反復計算の打ち切り判定には輻射熱負荷面より流入する熱量と熱伝達面より流出する熱量の収支の balance が必要な精度で満たされ、なおかつ、各節点の温度が十分な精度に収束することを計算打ち切りの条件にした。また熱応力の計算には要素をとりまくいくつかの節点の温度の相加平均を用いた。(21)から節点変位 $d$ が求められると、(13)、(15)、(16)により各々の要素の応力成分がえられる。

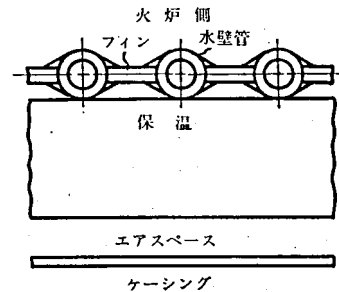


図 1

## 3. メンブレン水冷壁への適用

図1はボイラのメンブレン水冷壁の構造の断面図である。熱伝導および応力問題として対称性を考慮して図2に示される半ピッチ部分を解析した。以下、図2の各境界部分の取扱いと計算条件を述べる。

### 3・1 熱伝導問題として

図2の断面に垂直方向に熱の流れはないものとして二次元問題を解析した。同図で

A—B ..... 輻射熱負荷 (境界 $C_1$ )

A—A', B—B', A'—B' ..... 断熱 (境界 $C_3$ )

管内面 ..... 熱伝達面 (境界 $C_2$ )

熱伝導率は等方性で  $k_{ij} = k \delta_{ij}$  とする。

$\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。熱伝達面は円周方向に温度分布が変化するにしたがって、(3)により熱伝達率が変化するものとして取扱った。

### 3・2 平面ひずみ問題として

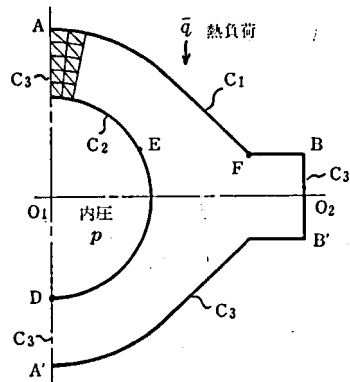


図 2

図2の断面の垂直方向は十分長い構造であるので平面ひずみ問題として解析した。

$A-A'$ ……変位の  $x$  方向成分は拘束され、 $y$  方向成分は自由とする。

$O_1-O_2'$ ……変位の  $y$  方向成分は拘束され、 $x$  方向成分は自由とする。

管内面……蒸気圧力の作用面

熱応力に關係する材料定数はすべて等方性であるものとする、(13)は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\lambda\theta}{(1-2\mu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - E\lambda\theta$$

ここに  $E$ ……縦弾性係数、 $\mu$ ……ポアソン比、 $\lambda$ ……線膨脹係数

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ ……工学定義のひずみ成分 である。

### 3・3 計算条件

計算に用いた水冷壁の各部寸法および伝熱、弾性に関する材料定数は次のとおりである。

管外径……24mm 管内径……14mm

ピッチ……36mm フイン厚……36mm

熱伝導率  $k=0.04\text{kcal/mm}^2\text{h}^\circ\text{C}$

熱負荷  $\bar{q}=0.3\text{kcal/mm}^2\text{h}$

内部発熱率  $\bar{Q}=0.0\text{kcal/mm}^3\text{h}$

管内蒸気圧  $p=200\text{kg/cm}^2$

縦弾性係数  $E=1.9 \times 10^4\text{kg/mm}^2$

ポアソン比  $\mu=1/3$

線膨脹係数  $\lambda=1.1 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{Cdeg.}$

なお熱伝達率の取扱いには次の(A)、(B)、(C)の3 case について計算した。

(A) 式(3)を用いる (非線型)。

(B)  $\alpha_m = \int_{C_2} \alpha dS / \int_{C_2} dS$  (定数)。

(C)  $\alpha=0.01\text{kcal/mm}^2\text{h}^\circ\text{C}$  (線型)。

上記(A)は本文2・3で説明した。(B)は(A)の計算結果から管内面の平均熱伝達率を求めて再計算したものを示し、(C)は三浦氏が用いた数値で筆者らも線型計算を試みたものを示す。なお図3に示される要素分割をおこなった。

### 3・4 計算結果

結果としては計算条件の case(A) と case(B) とでは温度分布にほとんど差は生じなかった。したがって応力分布も同様な結果となった。なお平均熱伝達率  $\alpha_m$  の値は  $0.3053\text{kcal/mm}^2\text{h}^\circ\text{C}$  となった。また、case(C) に対して、三浦氏の差分解析と筆者らの有限要素解析とでは温度分布図は全く一致していた。

図4は case(A) の温度分布図で、図5は case(C) の温度分布図を等温線で示したものである (ただし、管内基準温度を  $0^\circ\text{C}$  としている)。両図は温度レベルと等温線の状態にかなり

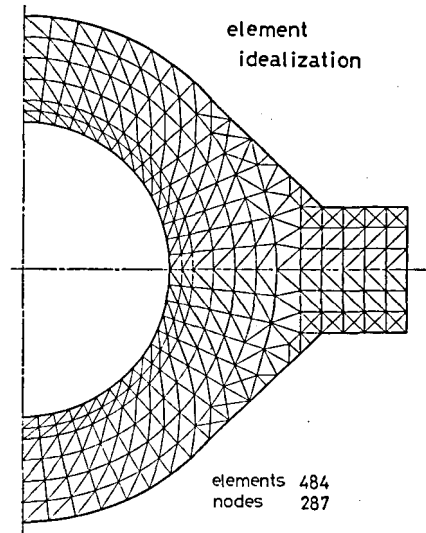


図 3

の違いがあらわれているが、3・3の計算条件に述べたように熱伝達率の取扱い方が異なることに起因している。

図6と図7はそれぞれ case(A)と case(C) の計算条件に対する線熱応力分布図である。これらの応力値は、熱応力に管内圧力により生じる応力が加算されたものである。図7の方が

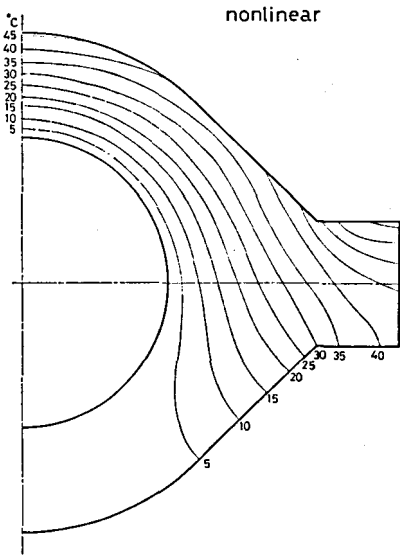


図 4

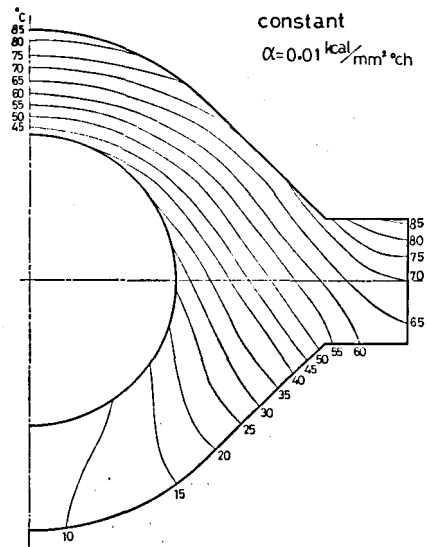


図 5

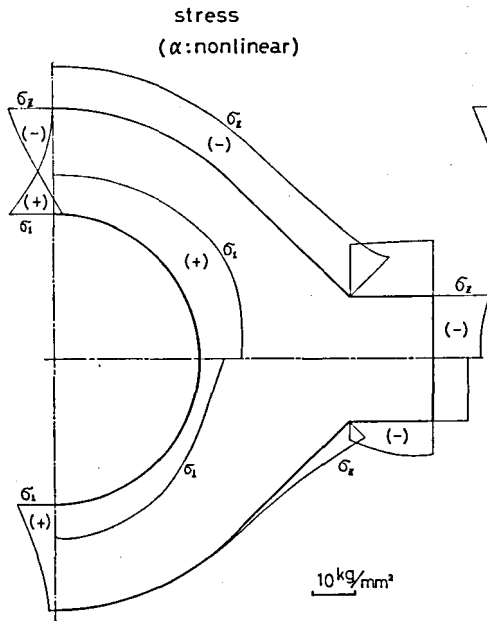


図 6

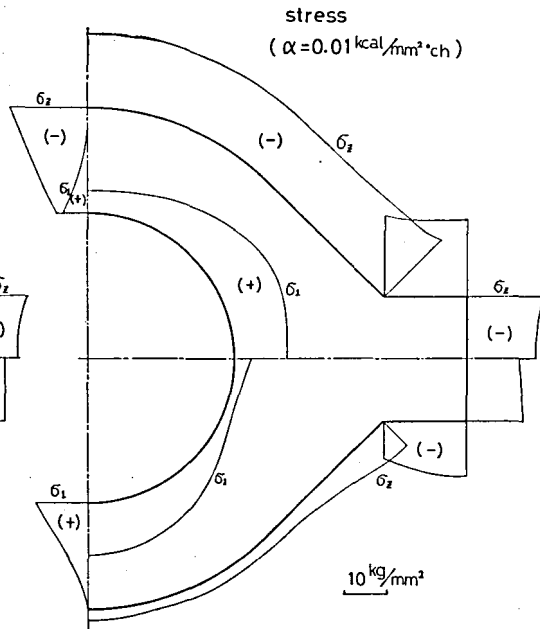


図 7

図6に比らべて応力値はかなり大きくなっている。これは熱応力は温度勾配によって生じるのであるから、温度分布図、図4、5の違いを考慮すると当然な結果である。

#### 4. む す び

各種のボイラ材料の許容応力は、参考文献(5)によると、 $350^{\circ}\text{C}\sim 400^{\circ}\text{C}$ の物体温度で急激に低下する。一方、管内蒸気圧力  $200\text{kg/cm}^2$  における飽和蒸気温度は  $364^{\circ}\text{C}$  であるからこれを基準温度として加算すると、図4の温度分布は危険温度に達し、図5は危険温度を越えた部分があることになる。このように最近のボイラ材料は高温強度の面では相当きびしい環境におかれるので応力は勿論、伝熱特性もできる限り正確な値を知る必要がある。

3・4で明白であるが熱伝達率は温度レベル、温度分布、応力分布に多大な影響を与えるので、この取扱いは重要な問題である。本論文は Jens and Lottes の実験式を導入し非線型問題に導き、数値計算上では Gauss-Siedel 法に簡単な修正を加えることによって解析できることを示した。

#### 参 考 文 献

- (1) 伝熱工学資料改訂第2版、日本機械学会編、1966
- (2) Zienkiewicz, O.C., Lecture on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Nato Symp., Lisbon, 1971, UAH
- (3) B.A. フィンレイソン、重みつき残差法と変分原理、鷲津他共訳、培風館、1974
- (4) 三浦一夫、メンブレン水壁の伝熱特性、日立評論、日立研究所創立30周年記念論文集
- (5) ボイラの材料と強度、日本ボイラ協会編、共立出版、1967