

# 円形断面曲管内主流部の2次流れについて(第2報)\*

鬼頭 勇\*\*・植木良昇\*\*\*

## 1. ま え が き

充分発達した円形断面曲管内の非圧縮性流体の流れについて、曲管の内半径が曲管軸の曲率半径に比べて小さくない場合の Navier-Stokes の運動方程式の近似解を求めて、断面内の速度分布と圧力分布を第1報<sup>1)</sup>に示した。その後、より一般的な解を求めることができたのでここに報告し、また、その結果を用いて、管軸方向速度成分の分布のこう配を検討したので、そのことについても併せて述べたい。ただし、流れを取扱う立場は前報と同じであって、主流部のみを対象とした。

## 2. 記 号

$r$  : 曲管の軸直角断面内の任意点  $P$  の軸心  $O$  からの距離。

$\psi$  :  $OP$  が曲管の曲率中心と  $O$  とを結ぶ直線となす角。

$\varphi$  : 断面位置をあらわす角。

$R$  : 曲管軸の曲率半径。

$a$  : 曲管の内半径。

$V_r$  : 主流部における流速の  $r$  方向成分。

$V_\psi$  : 主流部における流速の  $\psi$  方向成分。

$V_\varphi$  : 主流部における流速の  $\varphi$  方向成分。

$p$  :  $P$  点における圧力。

$\rho$  : 流体の密度。

$\mu$  : 流体の粘性係数。

$\nu$  : 流体の動粘性係数。

$C$  :  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ , 管軸方向の圧力こう配。

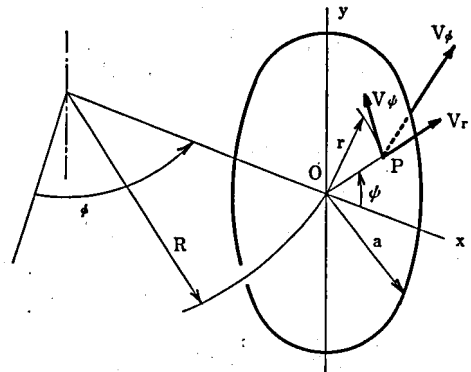


図 1

## 3. 運動方程式とその解

前報で、定常状態の場合の円環座標  $(r, \psi, \varphi)$  による Navier-Stokes の運動方程式と連続の式とを示したが、主流部では粘性の影響が少く、かつ、2次流れが管軸方向の流れに比べて弱いものとして  $V_r$  と  $V_\psi$  の2乗の項を  $V_\varphi$  の2乗に対して無視し、運動方程式と連続の式の簡略化を行った。本報においても、この簡略化された次に示す式を用いて解を求めること

\* 昭和49年10月、日本機械学会北陸信越支部長野地方講演会において発表  
\*\* 機械工学科教授 \*\*\* 機械工学科講師  
原稿受付 昭和50年9月11日

にする。

$$\frac{V_\phi^2 \cos\phi}{R+r\cos\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{V_\phi^2 \sin\phi}{R+r\cos\phi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \dots\dots\dots(2)$$

$$V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi(V_r \cos\phi - V_\phi \sin\phi)}{R+r\cos\phi} = -\frac{1}{\rho(R+r\cos\phi)} \frac{\partial p}{\partial \phi} \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_r \cos\phi - V_\phi \sin\phi}{R+r\cos\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

(1)と(2)式より  $p$  を消去すれば

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \cos\phi + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \sin\phi = 0$$

この微分方程式の解は次のようになる。

$$V_\phi = \Phi(r\cos\phi) \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 $\Phi$  は  $r\cos\phi$  の任意の函数である。よって

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\Phi^2 \cos\phi}{R+r\cos\phi}, \quad \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = -\frac{\Phi^2 \sin\phi}{R+r\cos\phi}$$

ここで、図1の  $x, y$  座標を用いて、 $r\cos\phi = x, r\sin\phi = y$  とおき、上の2つの式の変数を変換すれば

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{[\Phi(x)]^2}{R+x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

ゆえに、 $p$  は  $x$  のみの函数となり

$$\frac{p}{\rho} = \int_0^x \frac{[\Phi(x)]^2}{R+x} dx + G(\phi)$$

$G$  は  $\phi$  の任意函数であるが、 $\phi$  方向に流れが変化しない場合を考えているので、 $\phi$  方向の圧力こう配は一定で、この値を  $-C$  とおき、また、 $\phi = 0$  における管軸上の圧力を  $p_0$  とおくと、圧力分布は次式によって与えられる。

$$\frac{p}{\rho} = \int_0^x \frac{[\Phi(x)]^2}{R+x} dx + \frac{p_0}{\rho} - C\phi \dots\dots\dots(6)$$

次に、(5)、(6)式を(3)式に代入すれば

$$V_r \Phi' \cos\phi - V_\phi \Phi' \sin\phi + \frac{(V_r \cos\phi - V_\phi \sin\phi) \cdot \Phi}{R+r\cos\phi} = \frac{C}{R+r\cos\phi}$$

$$\therefore V_r = V_\phi \tan\phi + \frac{1}{\Phi + (R+r\cos\phi)\Phi'} \frac{C}{\cos\phi} \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $\Phi'$  は  $\Phi$  の  $r\cos\phi$  に関する導函数である。(7)式を(4)式に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan\phi + \frac{V_\phi}{r} \tan\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\ = \frac{C[2\Phi' + (R+r\cos\phi)\Phi'']}{[\Phi + (R+r\cos\phi)\Phi']^2} - \frac{1}{\Phi + (R+r\cos\phi)\Phi'} \cdot \frac{C}{r\cos\phi} - \frac{1}{\Phi + (R+r\cos\phi)\Phi'} \cdot \frac{C}{R+r\cos\phi} \end{aligned}$$

この式の右辺は  $r\cos\phi$  のみの関数なので、これを  $F(r\cos\phi)$  であらわせば

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan\phi + \frac{V_\phi}{r} \tan\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = F(r\cos\phi) \dots\dots\dots(8)$$

いま、 $f$  を  $r\cos\phi$  の関数、 $g$  を  $\phi$  の関数として、(8)の解を次のようにおく。

$$V_\phi = r \cdot f(r\cos\phi) \cdot g(\phi)$$

これを(8)式に代入すれば

$$[f \cdot g + r \cdot f' \cos\phi \cdot g] \tan\phi + f \cdot g \tan\phi - f' \cdot r \sin\phi \cdot g + f \cdot g' = F$$

$$\therefore \left[ \frac{dg}{d\phi} + 2g \tan\phi \right] f(r\cos\phi) = F(r\cos\phi)$$

この関係が成り立つためには、 $k$  を任意の定数として

$$\frac{dg}{d\phi} + 2g \tan\phi = k, \quad f(r\cos\phi) = \frac{1}{k} F(r\cos\phi)$$

であればよい。この第一式の解は

$$g(\phi) = e^{-\int 2 \tan\phi d\phi} \left[ \int e^{\int 2 \tan\phi d\phi} \cdot k d\phi + k' \right]$$

$$= k[\sin\phi \cos\phi + K \cos^2\phi]$$

ただし、 $K$  は任意の定数である。よって(8)の解として

$$V_\phi = r \cdot F(r\cos\phi) [\sin\phi \cos\phi + K \cos^2\phi]$$

これを(7)式に代入すれば

$$V_r = r \cdot F(r\cos\phi) [\sin^2\phi + K \sin\phi \cos\phi] + \frac{1}{\phi + (R+r\cos\phi)\phi'} \cdot \frac{C}{\cos\phi}$$

しかるに、流れの対称性から、 $\phi = \pm\phi_0$  において  $V_r$  は同符号、 $V_\phi$  は異符号でなければならぬので、 $K=0$  となり、主流部における流速分布は次式で与えられる。

$$V_r = r \cdot F(r\cos\phi) \sin^2\phi + \frac{1}{\phi + (R+r\cos\phi)\phi'} \cdot \frac{C}{\cos\phi} \dots\dots\dots(9)$$

$$V_\phi = r \cdot F(r\cos\phi) \sin\phi \cos\phi \dots\dots\dots(10)$$

$$V_\psi = \phi(r\cos\phi) \dots\dots\dots(11)$$

$$F(r\cos\phi) = \frac{C[2\phi' + (R+r\cos\phi)\phi'']}{[\phi + (R+r\cos\phi)\phi']^2} - \frac{C}{\phi + (R+r\cos\phi)\phi'} \left[ \frac{1}{r\cos\phi} + \frac{1}{R+r\cos\phi} \right]$$

よって  $V_\phi$  の分布を仮定し、 $\phi$  の関数が定まれば、2次流れの流速分布は(9)、(10)式によって与えられることになる。

#### 4. 解 の 考 察

任意関数  $\phi$  については、 $V_\phi$  の分布を求めた実験結果<sup>2)3)</sup> から  $r\cos\phi$  の多項式として表現することが適当と考えられる。すなわち

$$V_\phi = \phi(r \cos \phi) = V_m + A r \cos \phi + B r^2 \cos^2 \phi + \dots$$

しかし、測定値から  $V_\phi$  は直線分布と見なして差支えないので、従来の仮定に従って

$$V_\phi = V_m + A r \cos \phi \tag{12}$$

とすれば

$$F(r \cos \phi) = \frac{2CA}{(V_m + AR + 2A r \cos \phi)^2} - \frac{C}{(V_m + AR + 2A r \cos \phi) r \cos \phi} - \frac{C}{(V_m + AR + 2A r \cos \phi) (R + r \cos \phi)}$$

これを(9)、(10)式に代入して

$$V_r = \frac{C \cos \phi}{V_m + AR + 2A r \cos \phi} + \frac{C(V_m - AR) \cdot r \cos 2\phi}{2(V_m + AR + 2A r \cos \phi)^2 (R + r \cos \phi)} - \frac{C(V_m - AR) \cdot r}{2(V_m + AR + 2A r \cos \phi)^2 (R + r \cos \phi)} \tag{13}$$

$$V_\phi = -\frac{C \sin \phi}{V_m + AR + 2A r \cos \phi} - \frac{C(V_m - AR) \cdot r \sin 2\phi}{2(V_m + AR + 2A r \cos \phi)^2 (R + r \cos \phi)} \tag{14}$$

また、(6)式より

$$\frac{p}{\rho} = (V_m - AR)^2 \log_e \left( 1 + \frac{r \cos \phi}{R} \right) + (2V_m - AR) A r \cos \phi + \frac{1}{2} A^2 r^2 \cos^2 \phi - C \phi + \frac{p_0}{\rho} \tag{15}$$

よって、管内半径  $a$  が曲管軸の曲率半径  $R$  に比して小さくないときの速度分布と圧力分布は(12)~(15)式によって与えられることになる。

ここで、 $AR \gg V_m$ ,  $a \ll R$  とすれば、(12)~(14)式は

$$V_r = \frac{C}{AR} \cos \phi, \quad V_\phi = -\frac{C}{AR} \sin \phi, \quad V_\phi = V_m + A r \cos \phi$$

が得られ、従来の理論<sup>3),4)</sup>で用いられる式と一致する。

次に、(13)、(14)式によって2次流速の分布を求めるため、 $V_m/C$  を両辺に乗じて無次元化すれば

$$\frac{V_m V_r}{C} = \frac{\cos \phi}{1 + \frac{AaR}{V_m a} + 2\frac{Aa}{V_m a} \frac{r}{a} \cos \phi} + \frac{\left(\frac{AaR}{V_m a} - 1\right) \frac{r}{a} \sin^2 \phi}{\left(1 + \frac{AaR}{V_m a} + 2\frac{Aa}{V_m a} \frac{r}{a} \cos \phi\right)^2 \left(\frac{R}{a} + \frac{r}{a} \cos \phi\right)}$$

$$\frac{V_m V_\phi}{C} = -\frac{\sin \phi}{1 + \frac{AaR}{V_m a} + 2\frac{Aa}{V_m a} \frac{r}{a} \cos \phi} + \frac{\left(\frac{AaR}{V_m a} - 1\right) \frac{r}{a} \sin \phi \cos \phi}{\left(1 + \frac{AaR}{V_m a} + 2\frac{Aa}{V_m a} \frac{r}{a} \cos \phi\right)^2 \left(\frac{R}{a} + \frac{r}{a} \cos \phi\right)}$$

となり、前報と同様に  $Aa/V_m = 0.38$ ,  $R/a = 20$  として、2次流速の大きさ

$$\frac{V_m}{C} \cdot V_{sec} = \frac{V_m}{C} \sqrt{V_r^2 + V_\phi^2}$$

を求め、管軸における速さを1として、内側から外側に向かう直径上の計管値を示せば図2

のようになる。また、2次流れの傾きを計算すると前報と同程度の値が得られ、流線も同様である。図2によって、内側の部分の方が外側より減速度が大きいことがわかる。

### 5. 軸方向流速の分布について

曲管内の流れにおいて、 $R/a \rightarrow \infty$  として直管に近づけると

$$V_r \rightarrow 0, V_\phi \rightarrow 0, V_z \rightarrow V_m, \frac{p}{\rho} \rightarrow -C'z + \frac{p_0}{\rho} \quad (z : \text{管軸方向の座標})$$

となることが要求される。よって(12)~(14)式から、

$$Aa \rightarrow 0, AR = Aa \cdot \frac{R}{a} \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots(16)$$

また、(15)式については右辺第1項を展開して

$$\begin{aligned} (V_m - AR)^2 \times \log_e \left( 1 + \frac{rcos\phi}{R} \right) &= (V_m - AR)^2 \left[ \frac{rcos\phi}{R} - \frac{1}{2} \left( \frac{rcos\phi}{R} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{rcos\phi}{R} \right)^3 - \dots \right] \\ &= \frac{V_m^2 rcos\phi}{R} - 2V_m Aa \frac{r}{a} cos\phi + A^2 R a \frac{r}{a} cos\phi - \dots \end{aligned}$$

よって、 $\frac{p}{\rho}$ の条件がみたされるためには、(16)式の条件に次の条件をつけ加えればよい。

$$A^2 R a = (Aa)^2 \frac{R}{a} \rightarrow 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

さて、(12)式から、 $A = dV_\phi/dx$  で、 $A$ は $V_\phi$ の分布のこう配をあらわし、 $\rho, \mu, a, R, V_m$ の函数と考えられ、次元解析を用いることによって

$$A = \frac{\nu}{a^2} \cdot \left( \frac{a}{R} \right)^n \cdot f(Re) \quad \left( Re = \frac{2aV_m}{\nu} : \text{レイノルズ数} \right)$$

とあらわすことができる。ただし、 $n$ はある定数である。すなわち

$$Aa \sim \left( \frac{a}{R} \right)^n \quad \dots\dots\dots(18)$$

となり、これを(16), (17)の関係に適用すれば

$$\begin{aligned} Aa \rightarrow 0 & : n > 0 \\ Aa \cdot \frac{R}{a} \sim \left( \frac{R}{a} \right)^{1-n} \rightarrow \infty & \therefore 1-n > 0 \\ (Aa)^2 \cdot \frac{R}{a} \sim \left( \frac{R}{a} \right)^{1-2n} \rightarrow 0 & \therefore 1-2n < 0 \end{aligned}$$

ゆえに、 $n$ に関して次の制限が与えられる。

$$1 > n > \frac{1}{2}$$

この関係を確かめるために、図3のような装置を用いて空気を流し、 $V_\phi$ の速度分布を測定した。Squire<sup>5)</sup>によれば巻掛角 $150^\circ \sim 180^\circ$ で流れの状態が一定となる結果を得ているので、本実験では巻掛角 $180^\circ$ の位置で測定を行い、測定には0.8mm径の注射針による全圧管とゲッチングマンノメーターとを使用した。管としては内径32mmのワイヤ入りビニールホース

を用い管軸の曲率半径は 246mmと 321mmの 2種類とし、レイノルズ数は可能なかぎり近づけて測定した結果が図4で、管中心から内側寄りの部分に流速の直線分布が見られる。また、内側から外側に向かう直径上の速度変化を示したのが図5であって、 $L$ の範囲が直線分布に近いことがわかる。よって、この範囲の速度こう配(速度分布の回帰直線のこう配)を求めると

$$A_{246} = 0.7415 \text{ m/s/mm}, A_{321} = 0.8660 \text{ m/s/mm}$$

となり、(18)式によって  $n$  の値を求めれば

$$n = 0.5830$$

が得られる。このことから、 $n$  は  $1 \sim \frac{1}{2}$  の間にあり、 $1/2$  に近い値をとるものと推定することができる。

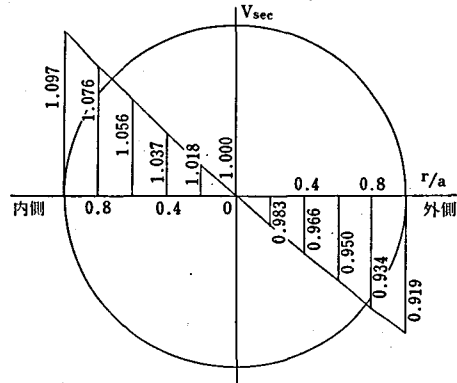


図 2

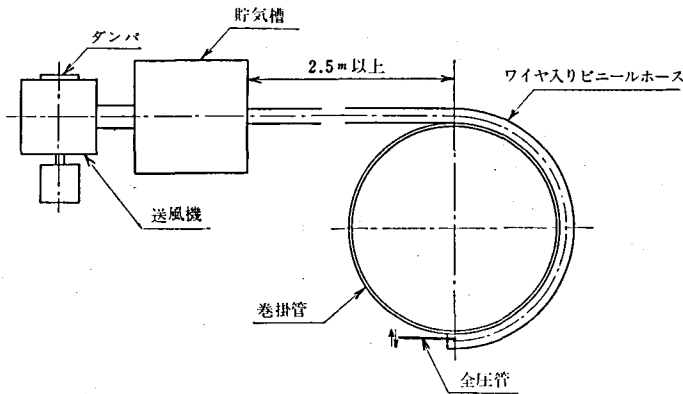


図 3

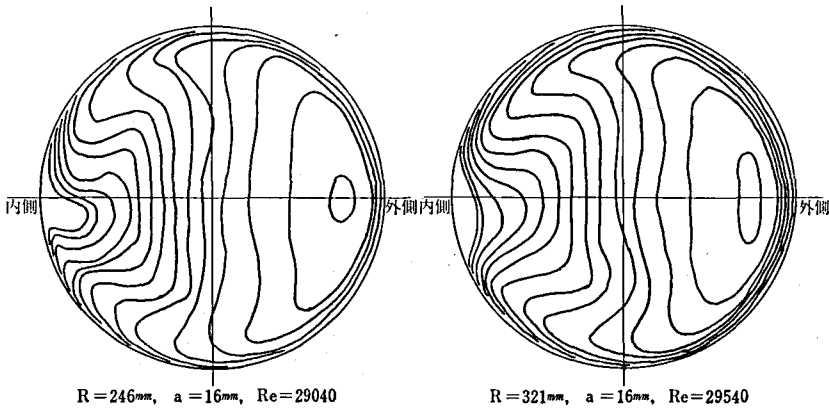


図 4

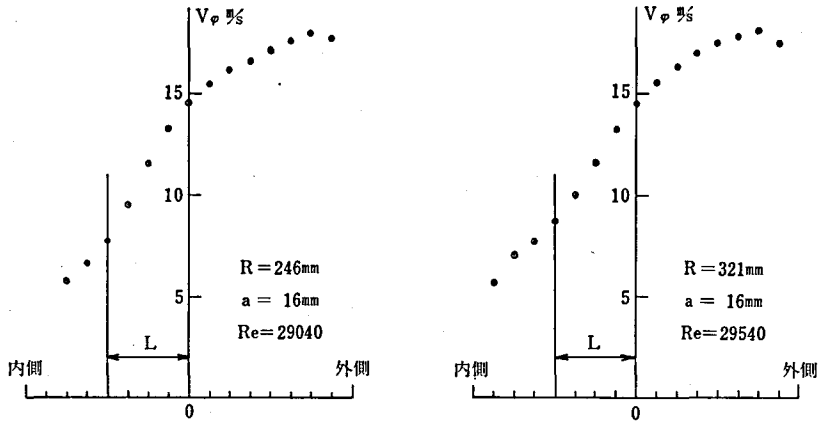


図 5

## 6. 結 言

曲管の内半径が管軸の曲率半径に比較して無視できない場合について、管中央部の速度分布と圧力分布を与える式が得られ、管軸方向速度成分が直線分布をはずれる場合についても2次流れの速度分布を計算できるようにした。

また、管軸方向速度成分が、曲管の内側から外側に向かって直線的に増大する場合について、その速度分布のこう配を検討し、管内半径の管軸曲率半径に対する比の約 $\frac{1}{2}$ 乗に比例してこう配が変化するものと推定できた。

終りに、本報告における実験に尽力された昭和48年度卒業生太田利之、倉沢文雄、山岸健一の諸君に感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 鬼頭勇, 長野工業高等専門学校紀要, 第5号, 昭48, 19頁.
- 2) M. Adler, Z.A.M.M., Bd. 14 (1934), S. 257.
- 3) 森康夫, 中山恒, 日本機械学会論文集, 第31巻, 第230号 (昭40-10.), 1521頁.
- 4) 伊藤英覚, 東北大学高速力学研究所報告, 第41巻 (1959), 第137号, 137頁.
- 5) Squire, H.B., Aero. Res. Counc. Rep. no. 16601 (1954).