

# 開水路における最大乱子の諸特性\*

松 岡 保 正\*\*

## 1. ま え が き

土木工学が対象とする開水路の流れはすべて乱流状態にあるが、その流れの実用的な抵抗則は Manning や Chézy に代表される古典的なものであり、半経験的な実験公式の域を出ない。乱流抵抗則に一步接近したものとしては、Prandtl の混合距離理論にもとづく平均流速の対数分布則がある。この対数分布則は実際の流れの流速分布を非常に良く説明しているために、その理論的なうらづけが種々試みられてきた。Monin と Oboukhov よる相似理論<sup>(1)</sup>、Malkus<sup>(2)</sup> によるエネルギー逸散最大という変分原理にもとづくもの、井上の乱子理論<sup>(3)</sup> にもとづくものなどがある。このうちで井上のものは近代乱流理論の1つである乱子理論にもとづくものであり乱流の内部構造に深く根ざしている。これによると、平均流速分布、摩擦抵抗などはすべて、流れの中の最大乱子の特性により説明される。すなわち、乱流場には最大乱子から最小乱子にいたるあらゆる階級の乱子が幅広いスペクトルで分布しているにもかかわらず、平均流速分布形成のもととなる運動量輸送は最大乱子による効果のみで十分説明できるのである。

乱流場の各乱子域のうちで、エネルギーカスケードを行う中間乱子域の特性については、Kolmogorov の相似理論や井上の乱子理論、さらには Kraichnan の理論などによりかなり十分な説明が行なわれている。また、エネルギー逸散をおこなう最小乱子域についても種々の理論的な接近が試みられている。これに対して、乱流場で最も支配的な最大乱子に関しては、理論的な研究は全くない。それは最大乱子が著しい非線型性を示すからである。最大乱子は平均流と乱流場を連結する窓口にあたり、平均流のひずみにもとづいてレイノルズ応力を通じ平均流から乱流場へのエネルギーを導入する役目を演じている。

最大乱子の特性としては、まず幾何学的特性として、そのスケールが考えられる。乱子のスケールに関しては、接地気層においては乱子の長さが乱子の存在する高度の10倍、幅および厚さは0.45倍程度であると主張する井上<sup>(4)</sup> のものがあるが、一般には定説がない。運動学的特性としての乱子速度は、流れ方向で摩擦速度の2.8倍、鉛直方向で摩擦速度の程度であることが知られている。力学的特性としてのエネルギー伝達率についても大体の傾向は知られているが特に定説は見当たらない。

本研究は、開水路流れにおける最大乱子のこれらの特性を実験的に研究する第一歩として、レイノルズ数が大きく乱流度の大きい現地水路における実測から、これらの諸特性の鉛直分布を明らかにしようとしたものである。

\* 昭和50年1月 土木学会中部支部研究発表会において発表

\*\* 土木工学科助手  
原稿受付 昭和50年10月6日

## 2. 乱子速度と乱子のスケール

### 2・1 乱流理論一般

乱流場には、最大乱子から最小乱子にいたるあらゆる階級の乱子が巾広く存在している。そのありさまは Richardson の詩がうたっているように<sup>(6)</sup>、平均流から最大乱子へ流入したエネルギーは、中間乱子領域をカスケードしてゆき、最後には粘性の作用で熱エネルギーへと逸散してゆく。これを井上の乱子理論に従って定式化すると次のようである。

まず、階級  $\lambda$  の乱子の直径を  $\lambda$ 、その乱子速度を  $v_\lambda$  とすると、

$$\frac{v_\lambda^3}{\lambda} \approx \text{const} (= \varepsilon), \quad \dots\dots\dots(1)$$

と表わされる<sup>(6)</sup>。  $\varepsilon$  は普通、単位時間単位質量当りの乱流エネルギーの逸散率といわれるが、隣り合う階級の乱子間のエネルギー伝達率ともみなされる。

近代乱流理論の成果はこの簡単な式に集約されているわけであるが、その表現形式はいろいろある。歴史的には Kolmogorov の構造函数表示が最初であるが、これと同等なものとして井上流に相関係数で表わせば<sup>(7)</sup>、次式のようになる。

$$R(r) = 1 - \left(\frac{r}{L_0}\right)^{2/3} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに  $L_0$  は最大乱子のスケール、 $r$  は乱流場における相関点間の間の距離である。

Oboukhov, Weizsäcker, Heisenberg 流にスペクトルで表わせば、

$$F(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに  $C$  は普遍定数、 $k$  は波数である。これらの式はいずれも中間乱子域でのみ成立するものである。

これらの式を、われわれが普通に使用する 1 次元 Euler 的な時間、周波数形式に変換すると、

$$R(\tau) = 1 - \left(\frac{\tau}{T_0}\right)^{2/3}, \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$F(n) = \frac{C}{(2\pi)^{2/3}}(\bar{u})^{2/3}\varepsilon^{2/3}n^{-5/3}, \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。ここに  $T_0 = L_0/\bar{u}$  は最大乱子の通過時間、 $n$  は乱子の通過周波数、 $C$  は普遍定数、 $\bar{u}$  は平均流速である。

これらの式は本来その理論構成の仮定からして、中間乱子域においてのみ成立するものであるが、これを拡張使用し、最大乱子にまで適用できるとするのが井上、Landau-Lifshitz の考え方である。すなわち、(1) と同じ形式が最大乱子の乱子速度  $v_0$  とそのスケール  $\lambda_0$  との間にも成立して、

$$\frac{v_0^3}{\lambda_0} \approx \varepsilon, \quad \dots\dots\dots(6)$$

なる関係が成立すると主張するものである。

2・2 最大乱子のスケールと速度の評価法

一般に乱れの速度は流速変動の標準偏差で  $\sqrt{\overline{u'^2}}$  のように与えられるが、これは、内容的には乱れのエネルギースペクトル密度を  $F(n)$  とすれば、

$$\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} F(n)dn, \dots\dots\dots(7)$$

であることからわかるように、あらゆる階級の乱子速度からの寄与から成り立っている。しかし、これがほぼ最大乱子の乱子速度に等しいことは井上の乱子理論からも明らかである<sup>(7)</sup>。

一方、最大乱子のスケールは、水路のスケールから一義的に決定されるはずであるが、その推定には種々の方法がある。乱流構造とは無関係であるが、普通良く用いられるものに積分スケールとセミスケールがある。積分スケールは、

$$L_x = \bar{u} \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau, \dots\dots\dots(8)$$

によって求められる。セミスケールは、自己相関係数  $R(\tau)$  を指数関数で近似し、 $R(\tau)$  が 0.6 に落ちる時の  $\tau$  を求め、その 2 倍の時間と平均流速との積としてえられる。一方、乱流構造と結びつけた求め方としては、(4) 式に示す井上の自己相関係数表示から求める方法、エネルギースペクトルを求め、最大のエネルギーに相当する周波数  $n_0$  を最大乱子の周波数であるとして、

$$L_0 = \frac{\bar{u}}{n_0}, \dots\dots\dots(9)$$

により推定する方法、流れ方向の流速変動の同時空間相関を測定し、その値が 0 に落ちる距離を最大乱子のスケールとする方法などがある。

エネルギー伝達率については、逸散スペクトルによって次のように表わされる。

$$\epsilon = \int_0^{\infty} n^2 F(n)dn. \dots\dots\dots(10)$$

これを求めるには最小乱子域の逸散スペクトルの測定が必要であるが、一般的には、その測定が困難なため、定数 C を与えて中間乱子域のスペクトル(5)式から求められる。

3. 観測およびデータ処理

3・1 測 器

最近では、実験水路における乱れの計測に用いられる流速計としては、受感部の寸法が小さいことからホットフィルム流速計全盛の感がある。しかしこの流速計は流体内に熱した受感部をさらすため、水中の使用には原理的に問題があると考えられる。この他の測器としては、超音波流速計、レーザー流速計、プロベラ式流速計などが普通考えられるが、ゴミなどの浮遊物がある現地水路で、容易にしかも長時間安定した測定をする場合にはプロベラ式流速計が最適である。プロベラ式流速計で乱れを計測する場合、測器の大きさによって生じるエネルギースペクトルの高周波端の切断が問題とされるが、本研究は最大乱子を対象としており、流速計の寸法は最大乱子の寸法よりもはるかに小さいためこの点での問題はない。

本研究には外径 1.3cm, 金属性 4 枚羽根の小型プロペラ流速計を用いた。測定原理は、プロペラが 1 対の白金電極の間を回転するとインピーダンスの変化によってパルスが生じるようになっており、これを数えて流速を求めるといものである。今回の観測においては、このパルスを動歪計によって電圧パルスに変換し、さらに充放電式の周波数—電圧変換装置によってアナログ変換した後、ローパスフィルターでリップルを取り除いてレコーダーに記録した。なお、この流速計の時定数は、観測時の流速の範囲内では 0.12 秒程度である。

1 次元スペクトルを測定する場合、測器の寸法と慣性により高周波端の切断が生じるため、時定数  $\tau_*$  と測器の寸法  $L$  によるスペクトルの切断状況を検討しておく必要がある。

いま、時定数  $\tau_*$ 、空間寸法  $L$  の測器で Euler 流に測定すると、実際にえられるのは主流方向の 1 次元スペクトル、

$$F_{ij}(k_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\mathbf{K}, \omega) dk_2 dk_3, \quad \dots\dots\dots(11)$$

が変形した、

$$\hat{F}_{ij}(k_1) = \frac{1}{1+k_1^2 L_*^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\mathbf{KL}/2)}{(\mathbf{KL}/2)^2} \Phi_{ij}(\mathbf{K}) dk_2 dk_3, \quad \dots\dots\dots(12)$$

である<sup>6)</sup>。ここに  $\mathbf{K}$  は波数ベクトル、 $\Phi_{ij}$  は定常一様な乱流場におけるスペクトル密度テンソル、 $L_*$  は応答距離で  $L_* = \bar{u}\tau_*$  と表わされる。本研究に用いた流速計は  $\tau_* = 0.12$  秒、 $L = 1.3$  cm であるから、仮に  $\bar{u} = 70$  cm/sec、波数を  $0.021/\text{cm}^{-1}$  (周波数  $n = 1.41/\text{sec}^{-1}$ ) とすると上式よりエネルギースペクトル密度は真値に対し 95% の値となる。

### 3・2 観測水路

小型流速計による観測は 2 種の水路について行なった。各々の水路についてその断面形状を図 1、図 2 に示す。両方の水路とも 3 方がコンクリートでライニングされており、農業用水路の上流部であるため浮遊物が少なく長時間安定した測定ができる。観測地点は、水路の彎曲の影響が入らないように上流に向かって水路の幅の 10 倍以上の直線部分がえられる場所を選んだ。

測定は、水路の中央に鋼管を固定し、鋼管に沿って流速計の高さを変えて行なった。なお、流速計はこの装置により、鋼管の影響を受けないよう鋼管から上流側へ 20cm 離してセットされている。

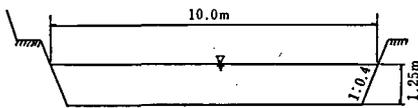


図1 現地水路 (水路1)

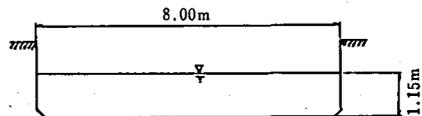


図2 現地水路 (水路2)

### 3・3 観測時間

流れを Euler 流に測定する場合、測器の寸法と慣性により高周波端の切断が生じる一方、観測時間  $T$  によって低周波端の切断が生じる。低周波端の切断は測定精度に影響し、また、不必要に長時間観測をすると流量変動などに影響されることもあるので最小限必要な観測時間<sup>9)</sup>を選ぶ必要がある。

今、観測時間 $T$ の測定から求めた乱子速度を $(\overline{u^{12}})_T$ 、積分時間スケールを $(T_x)_T$ とすれば、

$$(\overline{u^{12}})_T/\overline{u^{12}} = 1 - \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau)R(\tau)d\tau, \quad \dots\dots\dots(13)$$

$\tau \ll T_0$ , かつ  $T_0 \ll T$  の場合 Kolmogorov の局所等方性理論を拡張解釈して、

$$2\overline{u^{12}}(1-R(\tau)) = C(\varepsilon \overline{u\tau})^{2/3}, \quad \dots\dots\dots(14)$$

と仮定すれば、

$$(\overline{u^{12}})_T/\overline{u^{12}} = 1 - \frac{4}{5} \frac{T_0}{T}, \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$(T_x)_T/T_x = \left(1 - \frac{4}{5} \frac{T_0}{T}\right)^{3/2}, \quad \dots\dots\dots(16)$$

となる。実際の観測に当っては井上の考え方に従って簡単に、

$$T = 100 \frac{z}{u} \quad \dots\dots\dots(17)$$

によって観測時間を選んだ。zは水路床からの高さである。今回の観測ではエネルギースペクトルのピークを見易くするため(17)によるTよりも長く観測した。結果の整理の都合上、同一の水路におけるTは同じ値とした。

### 3・4 データ処理

観測によってえられた流速データから、自己相関およびエネルギースペクトル密度を求めるため、0.25秒間隔で720個を読みとった。最大ずらし数は  $M=144$  個とした。観測時間の割にずらし時間を長く取ると、自由度が小さくなって精度が低下するため本来ずらし時間は観測時間の1/10以下であることが望ましいが、今回はエネルギースペクトルの集中を、より直観的にするために最大ずらし数を大きくした。

なお、相関およびエネルギースペクトル密度は Blackman-Tukey 法によって求め、得られたスペクトル密度にはハミングウィンドウをかけて平滑化した。

## 4. 観 測 結 果

以下において、水路1および水路2における一連の観測から得られた結果を示す。まず最初に、乱子速度、最大乱子のスケール、エネルギー伝達率を求めるもととなった一連のグラフのうち、1例として水路1における  $z=95\text{cm}$  の点に関するものを図3～図7に示す。

$z=95\text{cm}$  においては、平均流速が  $104\text{cm/sec}$ 、乱子速度が  $8.4\text{cm/sec}$  であった。図3より、(8)式を用いて  $T_x$  求めると0.25秒となり、積分スケールは  $L_x=260\text{cm}$  になる。図4は自己相関のうち、ラグタイムの小さな範囲に着目し、指数函数(図中の直線)で近似したものである。このときセミスケールは  $185\text{cm}$  となる。図5はエネルギースペクトル密度のグラフであり、中間乱子域では  $-5/3$  乗則が良く成立している。高周波部分で直線から外れてくるのは、 $3 \cdot 1$ で述べたいわゆる高周波端のエネルギースペクトルの切断である。エネルギー集中を直観的にするために  $nF(n) - \log n$  にプロットし直したものが図6である。この曲線のピークの周波数から式(9)によって最大乱子を求めると  $L_0=870\text{cm}$  がえられる。なお、図5における  $-5/3$  乗の直線に(5)式をあてはめるとエネルギー伝達率は  $0.89\text{cm}^2/\text{sec}^3$  となる。

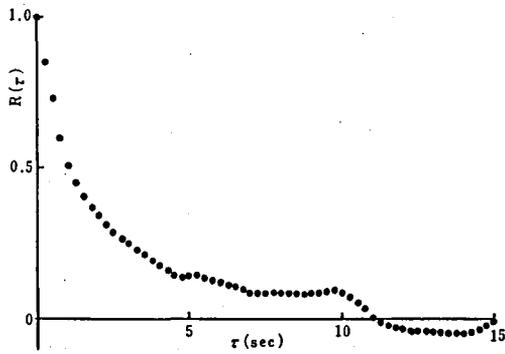


図3 自己相関係数

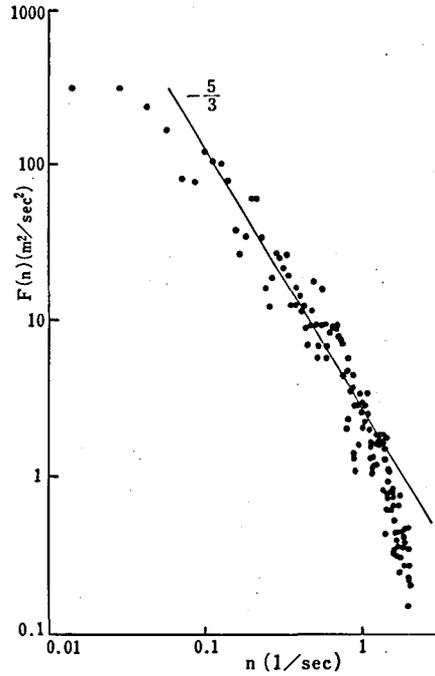


図5 エネルギースペクトル密度

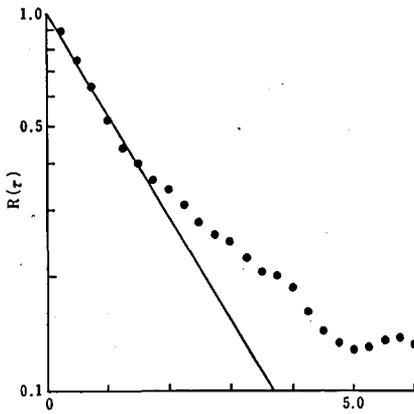


図4  $R(\tau)$  の指数関数近似

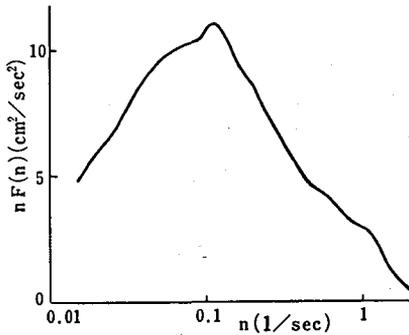


図6 エネルギースペクトル

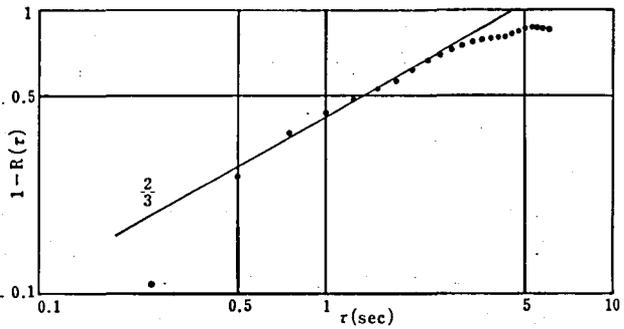


図7 井上の相関表示への近似

図7は井上流の相関係数表示をしたもので直線は2/3乗を示している。グラフより  $T_0$  は3.6秒であるから最大乱子の長さは  $L_0=365\text{cm}$  となる。

#### 4・1 乱子速度

流れ方向の乱子速度は流れ方向の混合に関係し、流速変動の標準偏差  $\sqrt{u'^2}$  で表わされる。それについて縦軸を相対水深  $z/H$  とし、横軸を平均流速との比  $\sqrt{u'^2}/\bar{u}$  としてプロットしたものを図8に示す。傾向としては、他の多くの実験および観測と同様に水路床に向かって増加している。

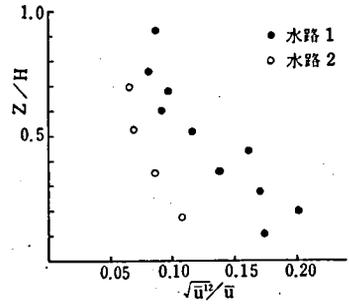


図8 乱子の相対速度

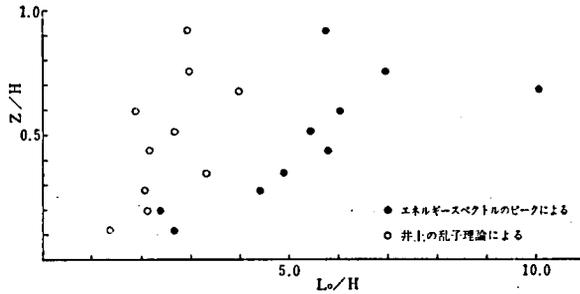


図9 最大乱子スケール

#### 4・2 乱子のスケール

最大乱子のスケールを推定するには本文2・1で述べたような方法がある。最初に、乱流構造にもとづいた方法である井上の方法とエネルギースペクトル曲線のピークから推定する方法で求めたものについて、縦軸を相対水深、横軸を水深との比  $L_0/H$  としてプロットしたものを図9に示す。図が示すとおり、いずれの方法で求めた場合にも最大乱子のスケールは水路床に向かって小さくなる傾向が良く出ている。また、エネルギースペクトルから求めたものは井上の乱子理論によるものの1.5倍2倍になっているようである。次に積分スケール

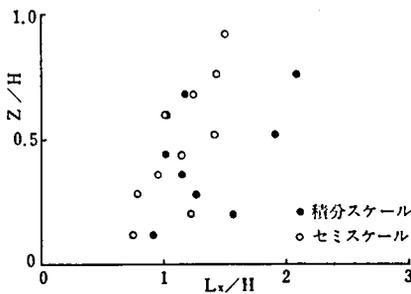


図10 積分スケールの鉛直分布

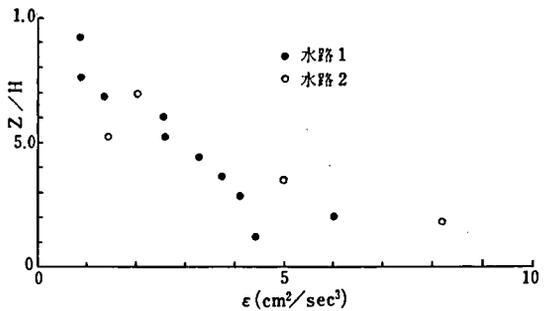


図11 エネルギー伝達率

について図9と同様にプロットしたものを図10に示す。図が示すとおり、セミスケールから求めたものは水路床に向って小さくなる傾向を示しているが、積分時間スケールから求めたものは明瞭な傾向が現われていない。セミスケールは余越の求めたものと同様の傾向を示している。なお  $z=115\text{cm}$  における積分時間スケールは求められなかったのでプロットしていない。この原因については考察の所で触れることにする。

4.3 エネルギー伝達率

エネルギー伝達率は逸散スペクトルから求めるのが普通であるが、今回の観測に使用した流速計では逸散スペクトルを求めることができないので、中間乱子域で  $-5/3$  乗則が成立しているものとしてエネルギースペクトル密度分布から(5)式によって  $\epsilon$  を求めた。このとき、普通定数  $C$  は 0.5 に近い値をとることが良く知られている。このようにして求めた  $\epsilon$  について縦軸を相対水深、横軸を  $\epsilon$  としてプロットしたものが図11である。図が示しているとうり  $\epsilon$  は水路床に向って増大している様子が良くうかがえる。しかし、余越の求めた  $\epsilon$  に比較して中には10倍にも達するものがあるので、余りはっきりしたことは言えない。

5. 考 察

乱子の相対速度については他の実験および観測と同様の結果が得られたが、積分スケールについては満足な結果が得られなかった。その原因は積分スケールが自己相関係数をもとにして求められたことによる。その例が観測1の  $z=115\text{cm}$  におけるものである。これを図12に示す。このように、いつまでも相関が0に落ちない場合積分時間スケールは求められない。この様なことが起るのは水平乱流場の影響ではないかと考えて、水路の幅  $B$  と水深  $H$  の比が異なる水路で長時間の観測を試みた(表1)。観測には直径 13cm の発電式プロペラ流速計を用

表1 観測した水路の断面形と流速

	$B$ (m)	$H$ (m)	$B/H$	$\bar{u}$ (m/sec)
3	11.0	1.30	8.5	0.47
4	10.0	1.25	8.0	0.97
5	6.4	1.00	6.4	0.81
6	6.0	0.60	10.0	0.46
7	7.4	0.70	3.4	0.35

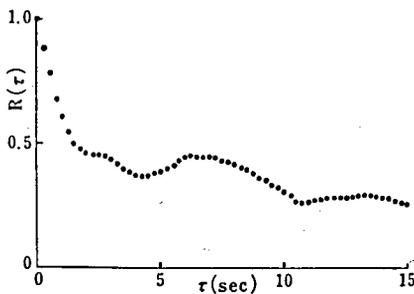


図12 自己相関係数

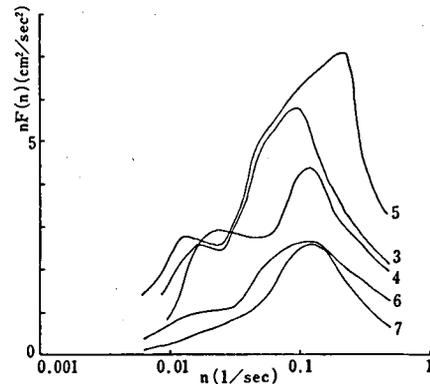


図13 エネルギースペクトル分布

いた。その結果を図13に示す。

これより大レイノルズ数の水路においては、 $B/H$ が増大すると鉛直乱流場の最大乱子に相当する周波数よりもはるかに低周波の部分でもエネルギースペクトルのピークが現われてくる。これが、水平乱流からの乱れのエネルギーへの寄与である。同様の結果は余越<sup>4)</sup>の、実河川での測定においては、更に明瞭に現われている。以上の理由で、現地水路および実河川のような  $B/H$  の大きな開水路においては、積分スケールによって乱子のスケールを推定する方法は適切ではないと言える。

エネルギー伝達率については、発電式プロベラ流速計を用いた場合、オーダー的には余越<sup>4)</sup>らが求めたものと変わらないが、同一の水路でも、小型プロベラ式流速計で求めたものは、数倍のオーダーになる。この原因についてはわからない。参考までに  $\varepsilon$  を最大乱子のスケールと乱子速度によって  $\varepsilon = a(\sqrt{u^2})^3/L_0$  と表わして普遍常数  $a$  の値を求めたところ、水路1では0.83、水路2では0.85となった。

## 6. あとがき

本文では開水路鉛直乱流場における最大乱子の諸特性について観測し、その結果を報告してきたが、要約すると次のようになる。

- i) 井上の乱子理論および中間乱子域におけるエネルギースペクトルの集中から求めた最大乱子のスケールは水路床に向って小さくなっている。また、後者は前者のほぼ1.5倍から2.5倍程度になっている。
- ii) エネルギー伝達率は水路床に向って増大している。
- iii)  $B/H$  の大きな現地水路では、その値が大きくなると水平乱流の影響で積分時間スケールが求まらないことがあるため、積分スケールによる乱子のスケールの推定は適切ではない。

なお、データの解析には、長野高専電算センターの FACOM 230-25 を使用した。

## 謝 辞

本研究を進めるにあたり、終始適切なご指導を賜った信州大学工学部余越正一郎助教授および同富所五郎助手に心から感謝致します。

## 参 考 文 献

- (1) Monin, A. S. and Yaglom, A. M. : Statistical Fluid Mechanics, Mechanics of Turbulence, vol. 1 (MIT press), p. 275, (1965).
- (2) Malkus, W. V. R. : Outline of theory of Turbulent Shear Flow, J. Fluid Mech, **1** 521, (1956).
- (3) 井上栄一：地表風の構造(4), 気象集誌, **28**, 219, (1950).
- (4) 井上栄一：穂波の研究(3), **11**, 147, (1955).
- (5) (1)に同じ P. 13.
- (6) Landau and Lifshitz : Fluid Mechanics, (Pergmon Press), p. 121, (1959).
- (7) 井上栄一：地表風の構造(3), 気象集誌**28**, 367, (1950).

- (8) 余越正一郎：開水路乱流場と測器の特性，信州大学工学部紀要，第30号，129，(1971).
- (9) 〃：最大乱子の寿命時間と通過時間，信州大学工学部紀要，第30号，119，(1971).
- (10) 〃：河川における乱流エネルギー逸散率について，京都大学防災研究所年報，第11号B，191，(1968).
- (11) 余越正一郎：河川乱流のエンストロフィー，土木学会中部支部講演要旨，76，(1975).