

# 乱流境界層の $\frac{1}{2}$ 乗法則

植木 良昇・鬼頭 勇

## 1. 序 論

圧力勾配のない乱流境界層の速度分布は内層で壁法則，外層で速度欠陥法則が成立する。板に沿う圧力勾配のある乱流境界層は壁法則が存在し，平衡な状態では速度欠陥法則が成立する事が Clauser<sup>(1)</sup> によって明らかにされた。しかし境界層が発達した後方では，対数法則が消え $\frac{1}{2}$ 乗法則があらわれる事が Perry<sup>(2)</sup> によって示された。又 Luxton<sup>(3)</sup> は乱流境界層が滑面から粗面に急変した時の内層は $\frac{1}{2}$ 乗法則に従うし，圧力勾配のない乱流境界層は $U$ 対 $y^{\frac{1}{2}}$ でプロットすると対数法則の外端より直線関係に従う事を報告した。これらの結果をもとにして新しく次元解析にて求めた $\frac{1}{2}$ 乗法則が板の場合は流れ方向に，円管の場合は  $Re$  数に応じて，相似性を示す事を確認する。データは圧力勾配ない滑面の乱流境界層は，Wieaghardt,<sup>(4)</sup> 円管は Nikuradse,<sup>(5)</sup> 圧力勾配のない粗面の乱流境界層は著者の実験結果を用いた。

## 2. 次元解析

次元解析は圧力勾配のある乱流境界層にて Perry<sup>(2)</sup>が行った形式と同じであり，Perry は  $\alpha = \frac{1}{\rho} |\partial p / \partial x|$  としたのを  $\alpha = \frac{1}{\rho} |\partial \tau / \partial y|$  とすればでてくる。すなわち相対速度は  $\alpha, y, \rho$  のみによって決定されるとすると  $\partial U / \partial y = f(\alpha, y, \rho)$

$$\text{ここで次元解析によって} \quad \partial U / \partial y = K' \alpha^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\alpha \text{ は } x \text{ のみの函数とすると(1)式を積分して} \quad U = K(\alpha y)^{\frac{1}{2}} + \Delta U \quad (2)$$

但し  $K = 2K'$  で定数。  $\Delta U$  は  $y$  によらない函数である。ここで  $U$  は  $\alpha, \rho, y, \nu, \tau_w$  によって

$$\text{決定されるとすると } \pi \text{ 定理によって} \quad U / U \tau = g(\alpha y / U \tau^2, U \tau^3 / \alpha \nu) \quad (3)$$

$$(2), (3) \text{ 式を比較して} \quad U / U \tau = K(\alpha y / U \tau^2)^{\frac{1}{2}} + \Delta U / U \tau [U \tau^3 / \alpha \nu] \quad (4)$$

ここで  $\Delta U / U \tau$  の函数形を定めるために壁近傍で対数法則が成立する事を利用すると， $Y_c$  を対数法則と $\frac{1}{2}$ 乗法則が成立する点とすると，次元解析によって  $Y_c$  が  $\nu$  によらないとすると，

$$Y_c = N U \tau^2 / \alpha \quad (N \text{ は定数}) \quad (5)$$

$$Y_c \text{ では} \quad U / U \tau = \frac{1}{k} \ln(N U \tau^3 / \alpha \nu) + A = K(N)^{\frac{1}{2}} + \Delta U / U \tau \text{ が成立するから}$$

$$\Delta U / U \tau = \frac{1}{k} \ln(C U \tau^3 / \alpha \nu) + A \quad \text{但し } \ln C = \ln N - k \sqrt{N} \cdot K \quad (6)$$

粗面の場合，絶対速度を  $\alpha, \rho, y, k, \tau_w$  によって決定されるとすると  $\pi$  定理によって

$$U / U \tau = f(\alpha y / U \tau^2, U \tau^3 / \alpha k) \quad (2) \text{ 式と比較して} \quad U / U \tau = K(\alpha y / U \tau^2)^{\frac{1}{2}} + \Delta U / U \tau [U \tau^3 / \alpha k]$$

$Y_c$  を対数法則と $\frac{1}{2}$ 乗法則の交点とすると  $Y_c = N U \tau^2 / \alpha$  従って

$$U_c / U \tau = A \log N \cdot (U \tau^3 / \alpha k) + B = K(N)^{\frac{1}{2}} + \Delta U / U \tau$$

よって  $\Delta U / U \tau = A \log(C \cdot U \tau^3 / \alpha k) + B$  ( $A, B, N, C$  は実験によって定める。)

3. 速度欠陥法則による確認

対数法則の外側は速度欠陥法則が成立し、 $\frac{1}{2}$ 乗法則と重なる。従ってこの両者は  $y \leq 0.7$  で一致しなければならない。その点について検討する。

速度欠陥法則は  $(U_\infty - u)/U_\tau = f_1\left(\frac{y}{\delta}\right) = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \dots (6)$  ここで  $\delta = 0.3\delta^* U_\infty/U_\tau$  によって  $\delta = 0.3\delta^*$

(4)式, (6)式より  $U/U_\tau$ を消去すると  $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = U_\infty/U_\tau - K\left(\frac{\alpha y}{U_\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \Delta U/U_\tau$  (7)

(i)板の場合は  $\alpha = 4U_\tau^2/\delta$  (7)式より  $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = U_\infty/U_\tau - 2K\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} - \Delta U/U_\tau$  (8)

ここで  $y = y_c$  では  $(U - U_c)/U_\tau = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{NU_\tau^2}{\delta \cdot \alpha} + E = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{N}{4} + E$  但し  $E = 0.6$

$$U_c/U_\tau = K(N)^{\frac{1}{2}} + \Delta U/U_\tau [U_\tau^3/\alpha v]$$

よって  $\Delta U/U_\tau = U_\infty/U_\tau + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{N}{4} - E - K(N)^{\frac{1}{2}}$  (9)

(9)式を(8)式に代入すると  $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = -2K\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{N}{4} + K(N)^{\frac{1}{2}} + E$

ここで次節で求めた  $K = 12.5$   $N = 0.12$  と  $\kappa = 0.41$  を代入すると

$$f\left(\frac{y}{\delta}\right) = 12.2 - 25\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

F. R. Hama<sup>(6)</sup> の実験式  $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = 9.6(1 - y/\delta \cdot \frac{1}{0.3})^2$  を比較すると 図1 のごとくなり  $y \leq 0.7$  で良く一致している。

(ii) 円管の場合

Ross<sup>(7)</sup> によると Nikuradse<sup>(8)</sup> の与えた円管内の対数法則  $U/U_\tau = 5.75 \log \frac{U_\tau y}{\nu} + 5.5$  よりも  $U/U_\tau = 5.6 \log \frac{U_\tau y}{\nu} + 5.6$  が壁近傍の速度分布を良く表わしている。そして  $\frac{y}{r} \leq 0.15$  では板に沿う境界層と同じくずれが生じてくる。このずれは板の場合ほど大きくないが無視できない。実際 NiKurdse のデータを図示したのが図2 であって確かにその傾向を良く表わしている。この点から速度欠陥法則に考慮をしなければならない。実際 Nikuradse のデータと

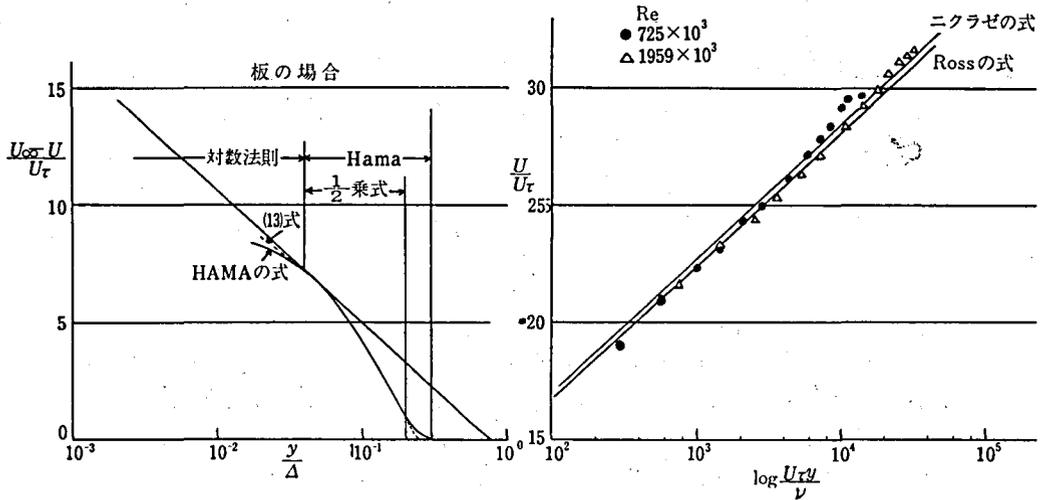


図 1

図 2

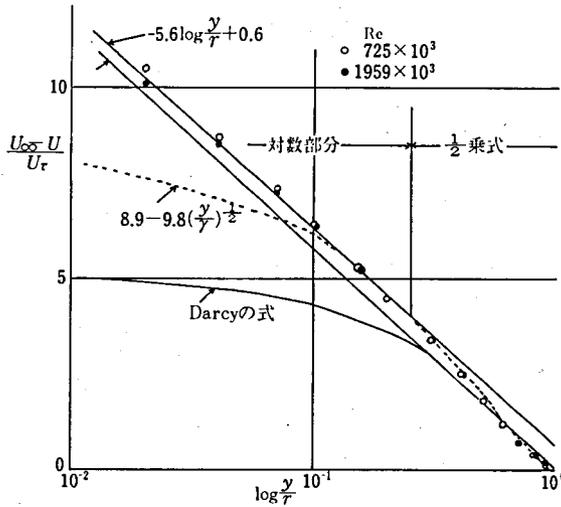


図 3

Prandtl<sup>(6)</sup>  $(U-U)/U\tau = \ln \frac{y}{R}$  を比べると 図3 に示すごとく必ずしも良く一致していない。

Darcy<sup>(9)</sup> の実験公式  $(U-U)/U\tau = 5.08 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{3/2}$  も  $\frac{y}{r} \geq 0.5$  で合うだけ。そこで(i)と同じ方法で速度欠陥の式を求めてみる。

$$(7)式より \alpha = \frac{U\tau^2}{r} を用いると \quad f\left(\frac{y}{r}\right) = U_\infty/U\tau - K\left(\frac{y}{r}\right)^{1/2} - \Delta U/U\tau \quad (11)$$

図3から速度欠陥の式対数部分を  $(U-U)/U\tau = -5.6 \log \frac{y}{r} + 0.6$  とすると

$$y = y_c \text{にて} \quad (U_\infty - U_c)/U\tau = -5.6 \log N + 0.6$$

$$(4)式より y = y_c \text{にて} \quad U_c/U\tau = K(N)^{1/2} + \Delta U/U\tau$$

$$\text{よって} \quad \Delta U/U\tau = U_\infty/U\tau - K(N)^{1/2} + 5.6 \log N - 0.6 \quad (12)$$

(12)式を(11)式に代入して3章で決めた  $K=9.8$   $N=0.25$  を代入すると

$$f(y/r) = 8.9 - 9.8(y/r)^{1/2} \quad (13)$$

(13)式を図3にて表わすが良く実験値と合っている。

### 3. $\frac{1}{2}$ 乗法則の検討

#### 3-1 板に沿う滑面の乱流境界層

データは Wieaghardt<sup>(4)</sup> を用いた。  $U$  対  $y^{1/2}$  をプロットしたのが 図4 でほぼ  $0.15 < \frac{y}{\delta} < 0.7$  にわたって直線性を示す。 Zoric<sup>(10)</sup> によると圧力勾配のない滑面での乱流境界層では次式にて近似できる。(  $\tau$  は実験値にて検討するのが望ましいのであるが  $x$  方向にてのデータをとったものは著者の知る限りない。)

$$\tau = \tau_w \left(1 - 4 \frac{y}{\Delta}\right) \quad (14) \text{ここで} \quad \Delta = \delta^* U_\infty / U\tau$$

$$\text{従って} \quad |\partial\tau/\partial y| = 4 \frac{\tau_w}{\Delta} \quad \text{従って} \quad \alpha = \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial\tau}{\partial y} \right| \text{であるから}$$

$$\alpha = 4U\tau^2/\Delta \quad (15)$$

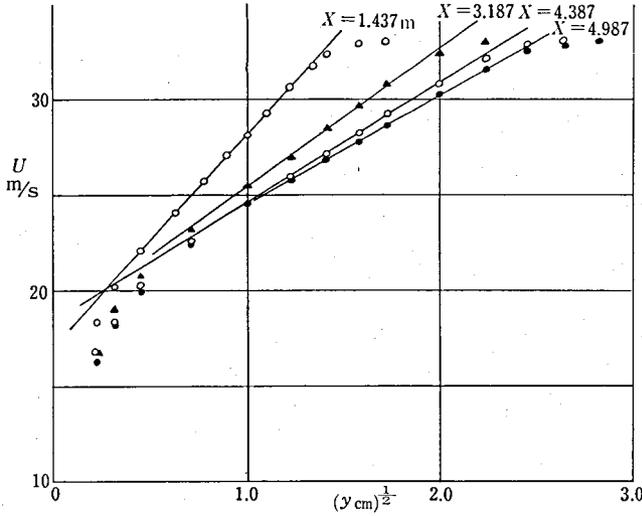


図 4

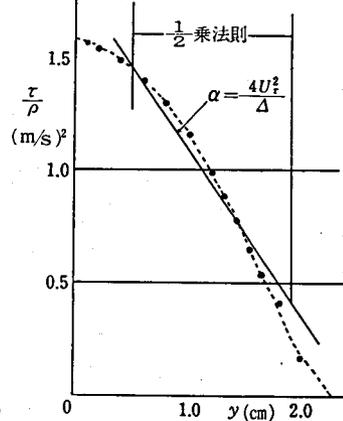


図 5

(14式について確認のために Coles<sup>10)</sup>の方法によって計算された Wieqghardt の  $\tau$  と比較すると  $0.15 \leq \frac{y}{\delta} \leq 0.7$  で  $\alpha$  は近似できる。(14式より実験値から  $\alpha$  が与えられる。  $U$  対  $y^{\frac{1}{2}}$  の勾配をグラフより読みとり (2)式より考えて、  $K = (\partial U / \partial y)^{\frac{1}{2}} / \alpha^{\frac{1}{2}}$  を求めその平均値より  $K = 12.5$  とした。又  $N$  の値を求めるために、  $y_c$  の実験値をグラフから読みとり、  $U\tau^2 / \alpha$  を実験値より求めその比の平均値をとって  $N = 0.12$  とした。よって式(6)より  $\ln C = \ln N - \kappa K \sqrt{N}$  から  $C = 0.02$  とした。従って  $\frac{1}{2}$ 乗法則は次式にて表わされる。

$$U / U\tau - \Delta U / U\tau = 12.5 (\alpha y / U\tau^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta U / U\tau = 5.6 \log(0.02 U\tau^3 / \alpha v) + 4.9$$

これをプロットしたのが図6でありほぼ一直線にのっている。

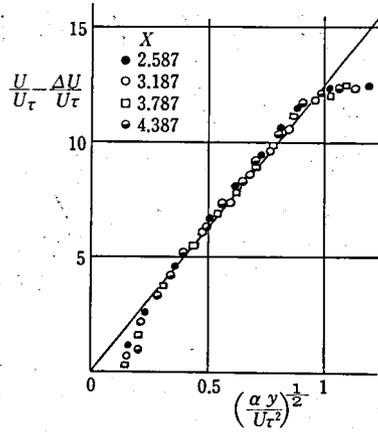


図 6

### 3-2 板に沿う粗面の乱流境界層

データは著者の実験値を用いた。装置は図7に示す風洞で行い、測定部は図8に示す。粗

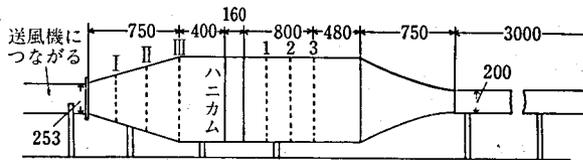


図 7

面の形状は図9に示す。 $U_\tau$ の計算は古屋<sup>10)</sup>に従った。すなわち $\theta/x$ と $R_x$ は両対数目盛上でほぼ一直線をなし指数近似ができ $\theta/x = \beta(U_\infty y/\nu)^m$ 。各実験結果より定数 $\beta$ ,  $m$ を知れば $U_\tau$ が求まる。 $\theta$ と $R_x$ は実験結果を図10に示す。又原点補正が必要であるので古屋<sup>10)</sup>の方法に従って求めた。その結果を $U/U_\tau$ 対 $y/k$ で図示したのが図11, 図12である。 $\frac{1}{2}$ 乗法則では $\alpha$ を求めなければならないが骨面のごとく実験式が存在しないので骨面と粗面での $K$ の値が同じであるとして $K=12.5$ として $U$ 対 $y^{\frac{1}{2}}$ (図13)のグラフより $\alpha = (\text{勾配}/K)^2$ として求めた。この値から相似法則を検討してみると図14, 図15のごとくほぼ一直線に乗っている。又 $\alpha$ の値の検討としてCorrsin and Kistler<sup>13)</sup>による粗面での速度及び $\tau$ の分布の測定結果があるのでこれによる $\alpha$ の検討を行った。 $U$ 対 $y^{\frac{1}{2}}$ (図16)のグラフより $\alpha = 0.0519(m/s)^2/cm$  図17より $\alpha = 0.0475(m/s)^2/cm$  これはほぼ一致するので上述の方法が正しいと思われる。

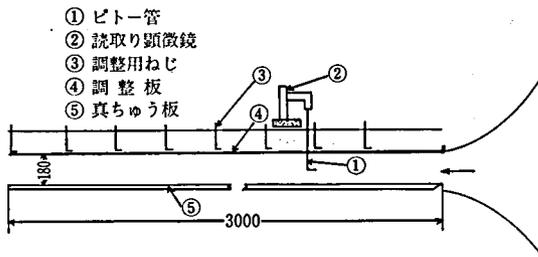


図 8

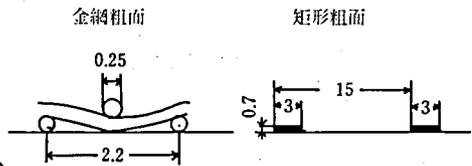


図 9 金網粗面 矩形粗面

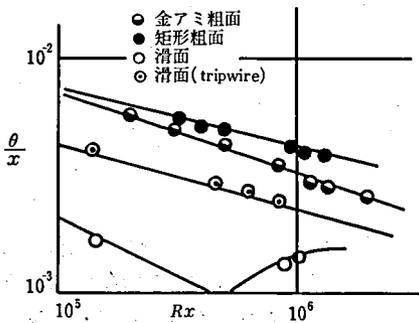


図 10

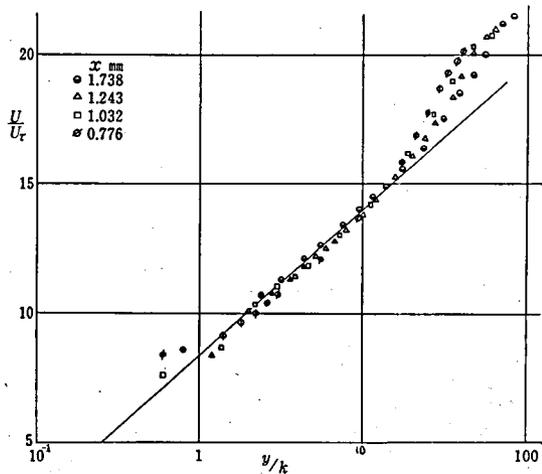


図11 金網粗面での速度分布

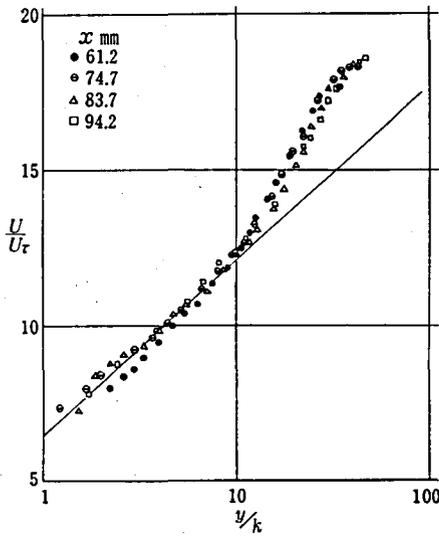


図12 矩形粗面の速度分布

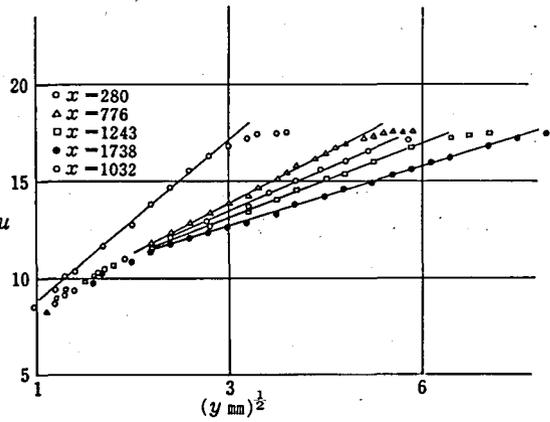


図13 金網粗面

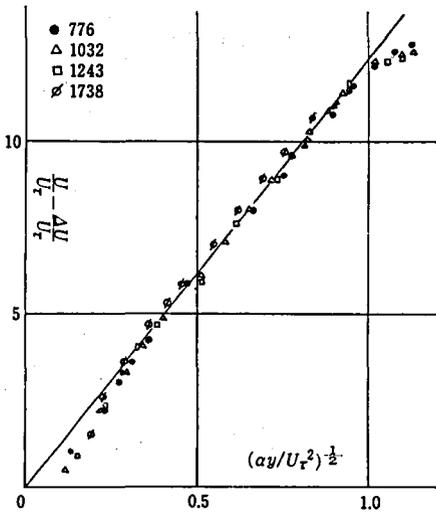


図14 金網粗面

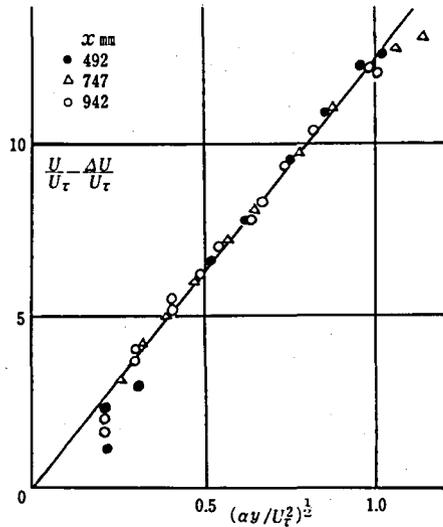


図15 矩形粗面

3-3 滑面の円管内の乱流境界層

円管内では  $\tau = \tau_w(1 - 2y/D)^{0.4}$  よって  $\alpha = 2U\tau^2/D$   $U$  対  $y^{1/2}$  のグラフ (図18) の勾配から実験的に  $K$  の値を求めた。各  $Re$  数の平均値より  $K=9.8$  とした。同様にして  $2y/D=0.25$  付近で  $\frac{1}{2}$  乗法則よりはずれるので  $C=0.035$ , これらの値を用いて  $U/U\tau - \Delta U/U\tau$  対  $(ay/U\tau^2)^{1/2}$  に整理して図19のグラフにのせる。板の場合と比べて直線部が少ない。

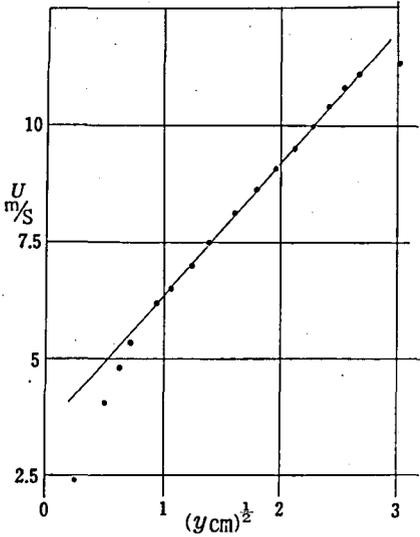


図 16

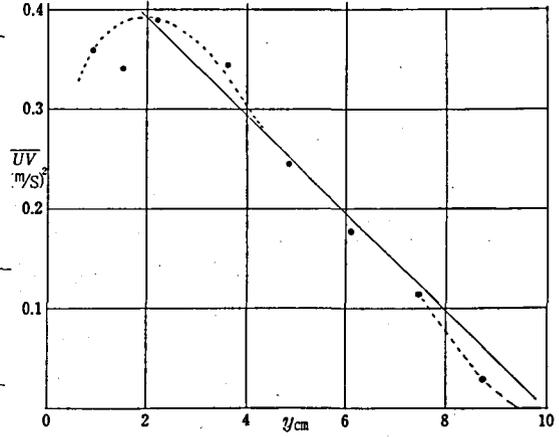


図 17

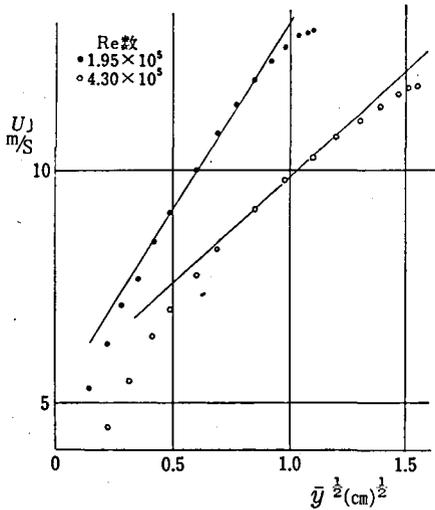


図18 円 管

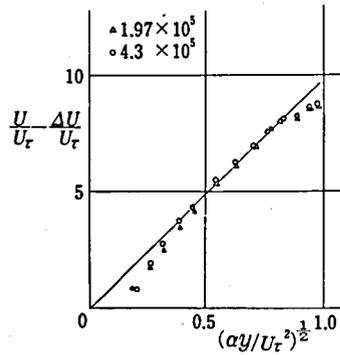


図 19

粗面の場合に従来は  $\tau = \tau_w \left(1 - \frac{2y}{D}\right)$  とされてきて、この式を用いると滑面と同じく $\frac{1}{2}$ 乗法則に従うことが示されるが最近 Townes 等<sup>10)</sup>の報告によってこの式が成立しない事が実験値を用いて示された。従って $\alpha$ の計算法が確立されないので $\frac{1}{2}$ 乗法則の検討も可能でない。

#### 4. 結 論

1. 次元解析によって導入された $\frac{1}{2}$ 乗法則は板の場合 $0.1 \leq \frac{y}{\delta} \leq 0.7$ 円管の場合 $0.25 \leq \frac{y}{r} \leq 0.5$ にわたって従来のデータを満足する。
2.  $\frac{1}{2}$ 乗法則から速度欠陥式の近似が導びかれた。円管の場合従来より精度が良い。

粗面の実験に関して御指導いただいた名古屋大学古屋善正教授に感謝します。風洞作成に際して御指導いただいた新潟大学若月助教授、前川助教授に感謝します。

### 参 考 文 献

- (1) Clauser J. Aero. Soci 1954 p.91
- (2) Perry J. F. M. 1966 p.481
- (3) Luxton J. F. M. 1971 p.721
- (4) Wieaghardt 1968 Conf. Compu. of turbulent boundary layer"
- (5) Nikuradse V. D. I. Forschungsheft 356
- (6) F. R. Hama Tran. Soc. Nav. Arch. and Marine Engrs. 62 333-358 1954
- (7) D. Ross Proc. of 3rd. Mid. on Flui. Mech.
- (8) Prandle Boundary layer Theory p.519
- (9) Darcy Boundary Layer Theory p.519
- (10) Zoric. Tech. Rept. Colorado State Uni.
- (11) Coles J. Fluid. Mech. 1956 p.191
- (12) 古屋・藤田 機論 昭41-5
- (13) Corrsin and kistler NACA T. N. 3133
- (14) Hinze Turbulence
- (15) Townes A. S.M. E. 1972 p.353