

# 円形断面曲管内主流部の2次流れについて

鬼 頭 勇

## 1. ま え が き

定常状態に達して後の円形断面曲管内の流れについて種々の理論的研究<sup>(1)~(8)</sup>がなされているが、いずれも曲管の曲率半径 $R$ に比して円管断面の半径 $a$ が小さく、 $R+a$ を $R$ と近似してその結果を求めている。また、その解析の方法については、層流領域に関するものはNavier Stokes の運動方程式を境界条件を入れて解き、級数による近似解を求めるか、<sup>(1)(2)</sup> または、数値計算で解く立場<sup>(7)(8)</sup>と、断面中央の主流部と管壁に沿う境界層部とに流れを分けて解を求める立場<sup>(3)(5)</sup>とがあり、乱流領域に関しては後者の方法<sup>(4)(6)</sup>がとられている。そこで、本稿では近似を1歩進めて $a/R$ の2乗以上の項を微小項として省略し、また、流れを主流部と境界層部に分ける立場をとり、主流部について運動方程式の近似解を出して、2次流れの速度分布を求めてみた。

## 2. 記 号

$r$  : 曲管の軸直角断面内での任意点 $P$ の断面中心 $O$ からの距離

$\phi$  :  $OP$ が曲管の曲率中心と $O$ とを結ぶ直線となす角

$\varphi$  : 断面位置をあらわす角

$R$  : 曲管軸の曲率半径

$a$  : 曲管の内半径

$V_r$  : 主流部における流速の $r$ 方向 (曲管断面内の半径方向) 成分

$V_\phi$  : 主流部における流速の $\phi$ 方向 (曲管断面内の接線方向) 成分

$V_\varphi$  : 主流部における流速の $\varphi$ 方向 (曲管軸方向) 成分

$p$  : 曲管の軸直角断面内の任意点 $P$ における圧力

$\rho$  : 流体の密度 (流体は非圧縮性として一定値をとるものとする)

$\nu$  : 流体の動粘性係数

$C : -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ , 曲管の管軸方向の圧力勾配

## 3. 基礎となる運動方程式

座標のとり方は従来の方法によった。すなわち、前節の記号を用いれば、図1のように曲管断面内の任意点 $P$ の座標は円環座標 $(r, \phi, \varphi)$ であらわすことができ、この座標系に関する Navier-Stokes の運動方程式は、時間と共に流れの状態が変らないものとするれば、次のような形となる。

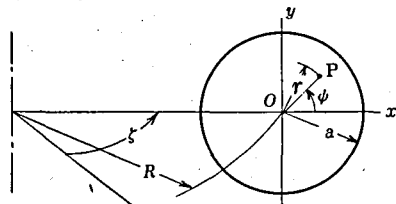


図 1

$$\begin{aligned}
& V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\phi \partial V_r}{r \partial \phi} - \frac{V_\phi^2}{r} + \frac{V_\phi}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi^2 \cos \phi}{R+r \cos \phi} \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\sin \phi}{R+r \cos \phi} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{V_\phi \cos \phi}{R+r \cos \phi} \right) \right] \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_r V_\phi}{r} + \frac{V_\phi \partial V_\phi}{r \partial \phi} + \frac{V_\phi}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi^2 \sin \phi}{R+r \cos \phi} \\
& = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{R+r \cos \phi} \right) \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi \sin \phi}{R+r \cos \phi} \right) \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi \partial V_\phi}{r \partial \phi} + \frac{V_r V_\phi \cos \phi}{R+r \cos \phi} - \frac{V_\phi V_\phi \sin \phi}{R+r \cos \phi} + \frac{V_\phi}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\
& = -\frac{1}{\rho (R+r \cos \phi)} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi \cos \phi}{R+r \cos \phi} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi \sin \phi}{R+r \cos \phi} \right) - \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} - \frac{V_r \cos \phi}{R+r \cos \phi} + \frac{V_\phi \sin \phi}{R+r \cos \phi} \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

これらの式について、曲管断面位置が曲管入口からへだたっていて流れが一定の状態に達しているとすれば、圧力 $p$ を除く諸量の $\phi$ 方向の変化率は0となり、また、主流部では粘性の影響が小さいと考えられるので粘性項を省略できる。さらに、2次流れが管軸方向の流れに比べて弱いとすれば、 $V_r$ および $V_\phi$ の2乗の大きさは $V_\phi$ の2乗に比して無視することができる。よって、(1)~(3)式は次のように簡略化される。

$$\frac{V_\phi^2 \cos \phi}{R+r \cos \phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

$$\frac{V_\phi^2 \sin \phi}{R+r \cos \phi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (5)$$

$$V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi \partial V_\phi}{r \partial \phi} + \frac{V_\phi (V_r \cos \phi - V_\phi \sin \phi)}{R+r \cos \phi} = -\frac{1}{\rho (R+r \cos \phi)} \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad (6)$$

連続の式は円環座標を用いる場合、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R+r \cos \phi} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r \cos \phi - V_\phi \sin \phi}{R+r \cos \phi} = 0$$

よって、(4)~(6)式と同様に上式は次のようになる。

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_r \cos \phi - V_\phi \sin \phi}{R + r \cos \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (7)$$

以上の(4)~(7)式を解くことになるが、(4)、(5)式は遠心項が優先していることを意味する。

#### 4. 運動方程式の解

先づ、(4)、(5)式より  $p$  を消去すれば

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \cos \phi + \frac{\partial V_r}{\partial r} r \sin \phi = 0$$

この偏微分方程式の解は

$$V_\phi = f(r \cos \phi)$$

となり、函数  $f$  を  $r \cos \phi$  の多項式と考え、2乗以上の項を省略して次式であらわす。

$$V_\phi = V_m + Ar \cos \phi \quad (8)$$

近似的に上式のようにあらわしうるのは実験値<sup>(9)</sup>によって裏づけすることができる。これを(4)と(5)式に代入すれば

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{(V_m + Ar \cos \phi)^2}{R + r \cos \phi} \cos \phi$$

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = - \frac{(V_m + Ar \cos \phi)^2}{R + r \cos \phi} \sin \phi$$

しかるに、図1に示す  $x$ 、 $y$  座標をとり、 $x = r \cos \phi$ 、 $y = r \sin \phi$  とすれば、上式は次のようになる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{(V_m + Ax)^2}{R + x}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

よって、 $p$  は  $x$  と  $\phi$  の関数となり、上の第1式から

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \int_0^x \frac{(V_m + Ax)^2}{R + x} dx + g(\phi) \\ &= \frac{A^2}{2} x^2 + (2V_m A - A^2 R) x + (V_m - AR)^2 \log \frac{R+x}{x} + g(\phi) \end{aligned}$$

ここでは  $\phi$  方向に流れが変化しない場合を考えているから、管軸上  $\phi$  方向の圧力勾配は一定となり、 $dg/d\phi = -C$  とおくことができる。この  $C$  は一定な数である。ゆえに、

$$g = -C\phi + \frac{p_0}{\rho}$$

ただし、 $p_0$  は  $\phi = 0$  における曲管軸上の圧力である。そこで圧力の式は次のようになる。

$$\frac{p}{\rho} = (V_m - AR)^2 \log\left(1 + \frac{r \cos \phi}{R}\right) + (2V_m A - A^2 R) r \cos \phi + \frac{1}{2} A^2 r^2 \cos^2 \phi - C\phi + \frac{p_0}{\rho}$$

上式右辺の第1項を級数に展開し,  $a/R$  の2乗以上の項を省略すれば

$$\frac{p}{\rho} = \frac{V_m^2}{R} r \cos \phi + \frac{V_m A}{R} r^2 \cos^2 \phi + \frac{A^2}{3R} r^3 \cos^3 \phi - C\phi + \frac{p_0}{\rho} \quad (9)$$

となって, Adler<sup>(3)</sup> の結果と同様な式が得られる.

次に, (8), (9)式を(6)式に代入すれば,

$$\begin{aligned} V_r A \cos \phi - V_\phi A \sin \phi + \frac{V_m + Ar \cos \phi}{R + r \cos \phi} (V_r \cos \phi - V_\phi \sin \phi) &= \frac{C}{R + r \cos \phi} \\ V_r \cos \phi - V_\phi \sin \phi &= \frac{C}{V_m + AR + 2Ar \cos \phi} = \frac{C}{V_m + AR} \left(1 - \frac{2A}{V_m + AR} r \cos \phi\right) \\ \therefore V_r &= V_\phi \tan \phi + \frac{C}{V_m + AR} \frac{1}{\cos \phi} - \frac{2CA}{(V_m + AR)^2} r \end{aligned} \quad (10)$$

この式を(7)式に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan \phi - \frac{4CA}{(V_m + AR)^2} + \frac{V_\phi}{r} \tan \phi + \frac{C}{(V_m + AR) r \cos \phi} \\ + \frac{C}{(V_m + AR)(R + r \cos \phi)} \left(1 - \frac{2A}{V_m + AR} r \cos \phi\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

をうる, よって, これまでと同じに簡略化すれば

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan \phi + \frac{V_\phi}{r} \tan \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = \frac{C(3AR - V_m)}{R(V_m + AR)^2} - \frac{C}{V_m + AR} \frac{1}{r \cos \phi} \quad (11)$$

この微分方程式の一般解を求めれば

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan \phi + \frac{V_\phi}{r} \tan \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0$$

を書き直して

$$\sin \phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\phi) = 0$$

ここで,  $V_\phi = r \cdot \xi(\phi)$  とおき,  $\phi$  の函数  $\xi$  の常微分方程式に変えて解けば,  $\xi = K \cos^2 \phi$  となり, 一般解は

$$V_\phi = Kr \cos^2 \phi \quad (12)$$

ただし,  $K$  は任意の定数である. 続いて, 特別解については

$$\frac{C(3AR - V_m)}{R(V_m + AR)^2} = P_a, \quad \frac{C}{V_m + AR} = P_b$$

とおき, (11)式の左辺が  $V_\phi$  について線形であることを利用して, 先づ, 次の微分方程式を解くことにする.

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan \phi + \frac{V_\phi}{r} \tan \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = P_a \quad (13)$$

この式を変形すれば

$$\sin \phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\phi) = P_a r \cos \phi$$

ここで、一般解と同様に、 $V_\phi = r \cdot \xi(\phi)$  とおけば、上式は次のようになる。

$$\frac{d\xi}{d\phi} + 2\xi \tan \phi = P_a$$

この解は  $\xi = P_a \sin \phi \cos \phi$  となり、(13)式の解を  $V_{\phi a}$  とすれば

$$V_{\phi a} = P_a \cdot r \sin \phi \cos \phi = \frac{C(3AR - V_m)}{2R(V_m + AR)^2} r \sin 2\phi \quad (14)$$

ついで、次の微分方程式を解く

$$\frac{\partial V_\phi}{\partial r} \tan \phi + \frac{V_\phi}{r} \tan \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = -\frac{P_b}{r \cos \phi}$$

この式を変形すれば

$$\sin \phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\phi) = -P_b$$

この解を  $V_{\phi b}$  とおけば

$$V_{\phi b} = -P_b \sin \phi = -\frac{C}{V_m + AR} \sin \phi \quad (15)$$

よって、(13)、(14)および(15)式より、微分方程式(11)の解は

$$V_\phi = Kr \cos^2 \phi - \frac{C}{V_m + AR} \sin \phi + \frac{C(3AR - V_m)}{2R(V_m + AR)^2} r \sin 2\phi$$

これを(10)式に代入して整理すれば

$$V_r = Kr \sin \phi \cos \phi + \frac{C}{V_m + AR} \cos \phi - \frac{C(3AR - V_m)}{2R(V_m + AR)^2} r \cos 2\phi - \frac{C}{2R(V_m + AR)} r$$

しかるに、断面内の2次流れは上下対称だから、 $\phi = \phi_0$  と  $\phi = -\phi_0$  とおくとき、 $V_r$  は同符号となり、 $V_\phi$  は異符号となることが要求される。よって、 $K=0$  でなければならない。ゆえに、流速を与える式は次のようにまとめられる。

$$V_r = \frac{C}{V_m + AR} \cos \phi - \frac{C(3AR - V_m)}{2R(V_m + AR)^2} r \cos 2\phi - \frac{C}{2R(V_m + AR)} r \quad (16)$$

$$V_\phi = -\frac{C}{V_m + AR} \sin \phi + \frac{C(3AR - V_m)}{2R(V_m + AR)^2} r \sin 2\phi \quad (17)$$

$$V_\phi = V_m + Ar \cos \phi \quad (18)$$

## 5. 運動方程式の解についての考察

2次流れの速度分布を知るために, (16), (17)式を変形して無次元化すれば

$$\frac{V_m + AR}{C} \cdot V_r = \cos \phi - \frac{3AR - V_m}{2(V_m + AR)} \cdot \frac{a}{R} \cdot \frac{r}{a} \cos 2\phi - \frac{1}{2} \frac{a}{R} \cdot \frac{r}{a}$$

$$\frac{V_m + AR}{C} \cdot V_\phi = -\sin \phi + \frac{3AR - V_m}{2(V_m + AR)} \cdot \frac{a}{R} \cdot \frac{r}{a} \sin 2\phi$$

となる. ここで,  $R/a=20$ とし, また, 伊藤英覚教授<sup>(4)</sup>の求めた数値によって  $Aa/V_m=0.38$ と仮定すれば,  $AR=7.6V_m$ となり, 曲管断面上半部を図2のように  $\phi$ を $15^\circ$ とび,  $r/a$ を0.1

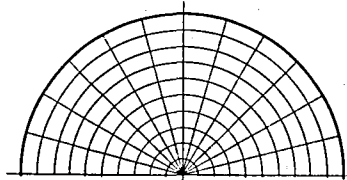


図 2

とびに分割し, 各格子点における  $V_r$ と $V_\phi$ の値を求め, その合速度の大きさと水平方向とのなす角を計算した. その結果を示したのが表1と表2であって, 管壁近くの境界層はないも

表1 2次流速の大きさ  $\frac{V_m + AR}{C} \sqrt{V_r^2 + V_\phi^2}$ 

$\phi^\circ \backslash r/a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0		0.9912	0.9823	0.9735	0.9647	0.9568	0.9470	0.9382	0.9293	0.9205	0.9117
15		0.9914	0.9830	0.9744	0.9659	0.9574	0.9488	0.9403	0.9317	0.9233	0.9147
30		0.9924	0.9847	0.9770	0.9695	0.9618	0.9542	0.9466	0.9389	0.9313	0.9237
45		0.9938	0.9875	0.9813	0.9751	0.9688	0.9627	0.9565	0.9502	0.9441	0.9379
60		0.9956	0.9912	0.9868	0.9825	0.9780	0.9737	0.9694	0.9650	0.9607	0.9564
75		0.9978	0.9955	0.9932	0.9910	0.9887	0.9865	0.9844	0.9822	0.9800	0.9779
90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0001	1.0002	1.0003	1.0004	1.0005	1.0006	1.0007
105		1.0023	1.0046	1.0069	1.0093	1.0116	1.0139	1.0163	1.0188	1.0211	1.0235
120		1.0044	1.0089	1.0133	1.0178	1.0223	1.0267	1.0311	1.0357	1.0402	1.0447
135		1.0062	1.0125	1.0188	1.0250	1.0313	1.0376	1.0439	1.0502	1.0565	1.0628
150		1.0077	1.0154	1.0230	1.0306	1.0383	1.0459	1.0536	1.0614	1.0690	1.0767
165		1.0085	1.0171	1.0256	1.0342	1.0427	1.0512	1.0597	1.0683	1.0768	1.0854
180		1.0088	1.0177	1.0265	1.0353	1.0442	1.0530	1.0618	1.0707	1.0795	1.0883

表2 2次流れが $\phi=0^\circ$ の方向となす角

$\phi^\circ \backslash r/a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0		0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
15		+0° 3'	+0° 7'	+0° 11'	+0° 14'	+0° 18'	+0° 22'	+0° 26'	+0° 29'	+0° 33'	+0° 37'
30		+0° 7'	+0° 13'	+0° 20'	+0° 27'	+0° 34'	+0° 41'	+0° 49'	+0° 56'	+1° 4'	+1° 11'
45		+0° 9'	+0° 19'	+0° 28'	+0° 38'	+0° 48'	+0° 58'	+1° 8'	+1° 19'	+1° 29'	+1° 39'
60		+0° 12'	+0° 23'	+0° 35'	+0° 47'	+0° 58'	+1° 10'	+1° 23'	+1° 35'	+1° 47'	+1° 59'
75		+0° 13'	+0° 26'	+0° 39'	+0° 51'	+1° 4'	+1° 17'	+1° 30'	+1° 44'	+1° 57'	+2° 10'
90	0°	+0° 13'	+0° 26'	+0° 40'	+0° 53'	+1° 6'	+1° 19'	+1° 32'	+1° 46'	+1° 59'	+2° 12'
105		+0° 13'	+0° 26'	+0° 38'	+0° 50'	+1° 3'	+1° 15'	+1° 28'	+1° 40'	+1° 52'	+2° 4'
120		+0° 11'	+0° 23'	+0° 34'	+0° 45'	+0° 56'	+1° 7'	+1° 18'	+1° 28'	+1° 39'	+1° 49'
135		+0° 9'	+0° 18'	+0° 27'	+0° 36'	+0° 45'	+0° 54'	+1° 3'	+1° 11'	+1° 19'	+1° 28'
150		+0° 7'	+0° 13'	+0° 20'	+0° 25'	+0° 32'	+0° 38'	+0° 44'	+0° 50'	+0° 56'	+1° 1'
165		+0° 3'	+0° 7'	+0° 10'	+0° 13'	+0° 16'	+0° 19'	+0° 23'	+0° 26'	+0° 28'	+0° 31'
180		0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°

のとして計算をした。この結果から、境界層の厚さを Adler<sup>(3)</sup> の測定値および伊藤教授<sup>(4)</sup> の計算値を参考にして仮定し、2次流れの模様を図示したものが図3である。

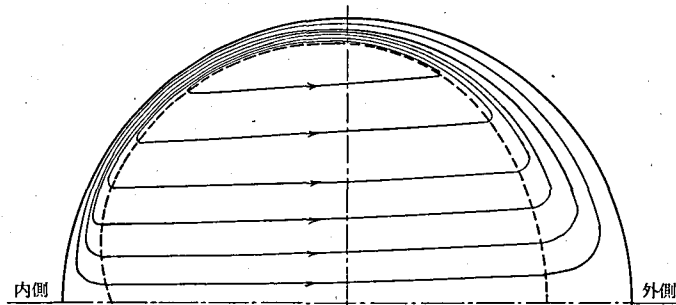


図 3

表1, 表2および図3より, 2次流れは曲管内側から外側に向かって流速を減じ, かつ, 流れが拡大してゆき, 境界層内の還元流に接続してゆくものと考えられる。D. Greenspan<sup>(8)</sup> が層流の場合について Navier-Stokes の運動方程式の解を Dean 数 0~5,000 の範囲にわたって電子計算機で求めた結果があり, Dean 数が2,000の場合の流線を示したのが図4である。この結果は図3と同様の傾向にあると考えられる。

従来の理論<sup>(3)~(6)</sup>では主流部の速度分布を次式で与えている。

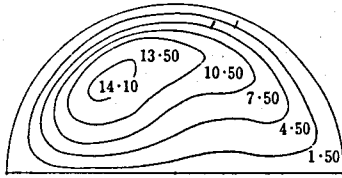


図 4

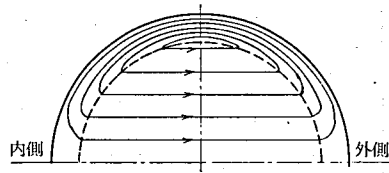


図 5

$$V_r = \frac{C}{AR} \cos \phi, \quad V_\phi = -\frac{C}{AR} \sin \phi, \quad V_\phi = V_m + Ar \cos \phi$$

この場合、2次流れの速度分布は図5のように一様な平行流であるとしていることになる。よって、本稿の速度計算式は近似度を1歩進めたものと考えられる。

終りに、参考までに圧力分布を表わす(9)式を変形して無次元化すれば

$$\frac{1}{V_m^2} \left( \frac{p - p_0}{\rho} + C\phi \right) = \frac{a}{R} \cdot \frac{r}{a} \cos \phi + \frac{Aa}{V_m} \cdot \frac{a}{R} \left( \frac{r}{a} \cos \phi \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{Aa}{V_m} \right)^2 \cdot \frac{a}{R} \left( \frac{r}{a} \cos \phi \right)^3$$

となり、速度分布と同様に  $R/a=20$ ,  $Aa/V_m=0.38$  と仮定して計算すれば、圧力分布は図6のようになる。本稿の遠心項優先の立場をとる近似の程度では等圧線が直線となり、内側から外側に向かって圧力の上昇の度合いが強まることになる。

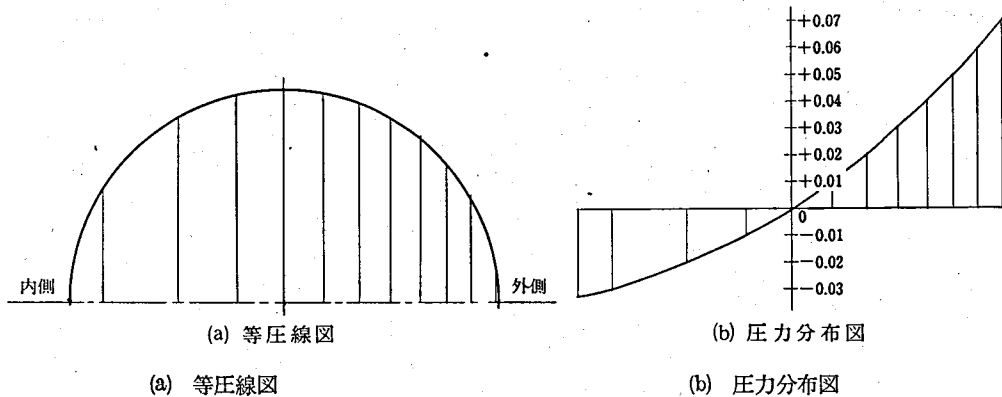


図 6

## 6. 結 び

以上のように、円形断面曲管内の主流部の2次流れについて、近似度を高めた計算を進めた結果、圧力分布が内側から外側に向かって次第に上昇してゆき、そのことに結びついて、2次流れの速度は内側から外側に向かって減少し、かつ、流れが広がってゆき、境界層内の



流れに移行するものと考えてよいことが判る。

上の結果に基いて、さらに、境界層内の流れや管摩擦について考察する必要があるが、それについては次の機会に譲りたいと思う。

終りに、本稿をまとめるのに必要な資料に関し種々御配慮をいただいた東北大学高速力学研究所伊藤英覚教授、京都大学大矢根守哉教授、東京大学宇宙航空研究所小口伯郎教授に深く感謝の意を表わす次第である。

### 参 考 文 献

- 1) Dean, W. R., Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe, Phil. Mag., Vol.4 (1927), p. 208.
- 2) Dean, W. R., The Stream-line Motion of Fluid in a Curved Pipe, Phil. Mag., Vol.5 (1928), p. 673.
- 3) M. Adler, Strömung in gekrümmten Rohren, Z. A. M. M., Bd. 14 (1934), S. 257.
- 4) 伊藤英覚, 曲管の流れに関する理論的並びに実験的研究 VII (乱れた曲り流れの管摩擦係数), 東北大学高速力学研究所報告, 第14巻 (1959), 第137号, 137頁.
- 5) 森康夫, 中山恒, 曲円管内強制対流熱伝達に関する研究 (第1報, 層流域), 日本機械学会論文集, 第30巻, 第216号 (昭39—8), 977頁.
- 6) 森康夫, 中山恒, 曲円管内強制対流熱伝達に関する研究 (第2報, 乱流域), 日本機械学会論文集, 第31巻, 第230号 (昭40—10), 1521頁.
- 7) D. J. McConalogue & R. S. Srivastava, Motion of a Fluid in a Curved Tube, Proc. Roy. Soc. A, 307 (1968), p. 37.
- 8) D. Greenspan, Secondary Flow in a Curved Tube, J. Fluid Mech., Vol. 57 (1973), Part 1, p. 167.