多入力線形制御系の正規形について

山岸　亘*

1 まえがき

単一入力多出力の定常系の場合は数多くの変換方法が示され解決されている．

単一入力多出力の非定常系の場合は Silverman 氏が正規形への変換可能の必要十分条件はその系が一様可制御であることを証明した(1)．

その後Ramaswami & Ramar 両氏は単一入力多出力の定常系式における正規形変換について従来の固有多項式の必要をなくし，系の可制御性を検定する方式を含む方法を発表した(2)．さらに両氏はこの方法を非定常系に拡張し，同様な結論を得た(3)．

著者は Silverman と Ramaswami & Ramar 両方法をすべて包含し，非定常・定常のどちらにも適用できる変換行列の求め方を得た(4)．なお，著者はその証明をさらに簡略なものに改良した(5)．

多入力多出力の場合は定常の場合でも変換可能であるための十分条件が不明確な点が多い．多入力で定常の場合の主要論文として，Luenberger 氏のものがある(6)．Luenberger 氏の正規形とちがう変形された正規形について，Asseo 氏のものがある(7)．多入力多出力の非定常系については，Seal & Stubberud 両氏が Luenberger 氏の方法を非定常に拡張した(8)．本論文は Luenberger 氏および Seal & Stubberud 氏の両論文の問題点を指摘し，その方法の適用限界を明らかにする．

2. Luenberger の方法と問題点

多入力の定常な線形制御系は次のベクトル微分方程式で記述される．

$$\dot{x}(t)=A\cdot x(t)+B\cdot u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ただし　$x(t)$は $n\times 1$ の対象の状態ベクトル：Aは $n\times n$ の対象の定数行列
　　　　$u(t)$は $r\times 1$ の入力ベクトル　　：Bは $n\times r$ の入力の定数行列

仮定として，$n\times(nr)$ の可制御行列　$\Gamma=[B,\ AB,\ A^2B, \cdots\cdots,\ A^{n-1}B]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

の階数は n とし，Bの r 個の列は一次独立であるとする．

$B=[b_1,\ b_2, \cdots\cdots,\ b_r]$ とおき

$$P=[b_1,\ Ab_1, \cdots\cdots,\ A^{n_1-1}b_1, \cdots\cdots,\ b_r,\ Ab_r, \cdots\cdots,\ A^{n_r-1}b_r]\cdots\cdots (3)$$

を $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ かつ $\det P\fallingdotseq 0$ となるように作る．

---

* 数学科

昭和46年11月20日受理

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} e^1{}_1 \\ \vdots \\ e^1{}_{n1} \\ \vdots \\ e^r{}_1 \\ \vdots \\ e^r{}_{n_r} \end{pmatrix}\cdots\cdots(4),\quad e^i{}_{n_i}=e_i\quad (i=1\cdots r)\cdots\cdots(5)$$

とおく．e_iにより

$$S=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1A \\ \vdots \\ e_1A^{n_1-1} \\ \vdots \\ e_r \\ e_rA \\ \vdots \\ e_rA^{n_r-1} \end{pmatrix}\cdots\cdots(6)$$

を定義すると det $S\fallingdotseq 0$ となり，$x=S^{-1}y$ なる変換により(1)は

$$\dot{y}=\hat{A}y+\tilde{B}u\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

と変換される．

$$\hat{A}=\begin{array}{c|ccccccccccc|}
 & \overbrace{\hphantom{0\ 1\ 0\cdots 0}}^{n_1} & & & & & & & \overbrace{\hphantom{0\ 1\ 0\cdots 0}}^{n_r} & & & \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots\ 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n_1 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & & & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots\ 0 \\
 & a_1{}^{11} & a_2{}^{11} & \cdots & \cdots & a_{n_1}{}^{11} & a_1{}^{12} & \cdots & a_{n_2}{}^{12} & \cdots & a_1{}^{1r} & \cdots\ a_{n_r}{}^{1r} \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1\ \ 0\cdots 0 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & & & 0 & 0\ \ 1\cdots 0 \\
n_r & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots & \ddots\ \ \ddots \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0\cdots 0\ \ 1 \\
 & a_1{}^{r1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n_1}{}^{r1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1{}^{rr} & \cdots\ a_{n_r}{}^{rr}
\end{array}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$(\hat{A}=SAS^{-1}$ の関係あり$)$

$$\tilde{B}=\begin{array}{c|cccc|c}
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
n_1 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 & 1 & \times & \cdots & \times & n_1+n_2 \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & 1 & \times\ \cdots & \times & \\
 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 1 &
\end{array}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$(\tilde{S}=SB$ の関係あり$)$

(×は一般に0でない数)

さらに，

$$\hat{B}=\begin{array}{c|cccc|c}
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
n_1 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 1 & \vdots & & \vdots & n_1+n_2 \\
 & 0 & & & & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & 1 & & \vdots & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n+n_2+\cdots+n_r=n\text{ 番}
\end{array}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)\quad ,\quad D=\begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots(11)$$

とするとき $\tilde{B}=\hat{B}D$ なる関係があるから $v=Du$ とおくと(7)は　$\dot{y}=\hat{A}y+\hat{B}v\cdots\cdots\cdots(12)$ となり正規形に変換されるという．しかし，以上に挙げた条件から$\hat{A}$は(8)の形になるが(9)の右辺に$\tilde{B}$がなる保証は得られない．従って，一般に条件がそなわっていても常に正規形(12)になるとは限らない．そのため十分条件にさらに条件を付加して強めねばならない．その付加条件として

$$n_1\geqq n_2\geqq\cdots\cdots\geqq n_r\qquad \text{かつ}\qquad n_1-n_r\leqq 1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

を挙げることができる．

まず反例を示す.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(列ベクトルは一次独立である)とする.

$$\Gamma=[B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B]=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -4 & -6\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & 3 & -6 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

, $n_1=3$, $n_2=1$とし,

$$P=[b_1,\ Ab_1,\ A^2b_1,\ b_2]=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

とする.

$\det P=1$　$\therefore \mathrm{rank}\ \Gamma=\mathrm{rank}\ P=4$(従って可制御行列の階数は 4 である)

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e_1=[0\quad 1\quad 0\quad 0],\ e_2=[0\quad 0\quad 0\quad 1],\qquad S=\begin{pmatrix}e_1\\ e_1A\\ e_1A^2\\ e_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad S^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \hat{A}=SAS^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -6 & -4 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

(det $S=-1$)

$$\tilde{B}=SB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \boxed{-1}\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となり $\tilde{B}$ は $\boxed{-1}$ があるため(9)の右辺の型とならぬ. 従って(11)の型の如何なるDをとっても正規形(12)にすることは不可能である.

条件(13)を付加したときの例を示すと, $n_1=n_2=2$ とし

$$P=[b_1,\ Ab_1,\ b_2,\ Ab_2]=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \det P=1,\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$e_1=[0\quad 3\ -1\quad 1]$, $e_2=[0\ -1\quad 0\quad 0]$

$$S=\begin{pmatrix}e_1\\ e_1A\\ e_2\\ e_2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1 & 1\\ 1 & -4 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \det S=1,\quad S^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -7 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}=SB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \hat{A}=SAS^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 7\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 4 & -3\end{array}\right)$$

となり, $\tilde{B}=\hat{B}D$, ($D=E_2$　2次の単

位行列）となり正規形へ変換可能となる．条件(13)が加えねばならぬ理由は例えば $n_1=4$, $n_2=2$, $n_3=1$のとき，

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1A & 0 & 0 & \times \\ e_1A^2 & 0 & \times\Big\}{\scriptstyle n_1-n_2\,\text{個}} & \times\Big\}{\scriptstyle n_1-n_3\,\text{個}} \\ e_1A^3 & 1 & \times & \times \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_2A & 0 & 1 & \times\}{\scriptstyle n_2-n_3} \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \widetilde{B}$$

$P=[b_1,\ Ab_1,\ A^2b_1,\ A^3b_1,\ b_2,\ Ab_2,\ b_3]$,
$(P^{-1})^T=[e_1^{1T},\ e_2^{1T},\ e_3^{1T},\ e_4^{1T},\ e_1^{2T},\ e_2^{2T}e_1^{3T}]$,
$e_1=e_4^1$, $e_2=e_2^2$, $e_3=e_1^3$となり，$P^{-1}P=E$を使って計算すると$\widetilde{B}$は下のようになるが，×の部分は一般に0とならぬ．例えば$e_1A^2b_2=e_4^1A^2b_2$となり $e^1{}_4b_2=e^1{}_4Ab_2=0$ であるが $e^1{}_4A^2b_2$ は 0 になる保証はないからである．$\widetilde{B}$が(9)の右辺になるためには $n_1-n_2\leqq 1$, $n_1-n_3\leqq 1$ でなくてはならぬから $n_1\geqq n_2\geqq n_3$ かつ $n_1-n_3\leqq 1$でなくてはならぬ．

3. Seal & Stubberud の方法と問題点

多入力の非定常な線形制御系は $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$…………………………(14)
で表わされる．ベクトル・行列の大きさは(1)と同じである．$B(t)=[b_1\cdots\cdots\cdots b_r]$の r 個の列 $b_i(i=1\cdots\cdots\cdots r)$ は互に一次独立と仮定する．$Q_1^i=b_i(i=1\cdots\cdots\cdots r)$ とし

$$Q^i{}_{j+1}=AQ^i{}_j-\dot{Q}^i{}_j\,(i=1,\cdots\cdots,r:j=1,\cdots\cdots,n_i-1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

より $Q=[Q^1{}_1\cdots\cdots Q^1{}_{n_1},\ Q^2{}_1\cdots\cdots Q^2{}_{n_2}\cdots\cdots Q^r{}_1\cdots\cdots Q^r{}_{n_2}]$ を求める．ここで det $Q\fallingdotseq 0$ ならば

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{nj}k_l{}^{ji}Q_l{}^j=AQ_{ni}{}^i-\dot{Q}_{ni}{}^i\quad(i=1\cdots\cdots r)\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

より $k_l{}^{ij}$ を求め$\widetilde{A}$が求まる．変換 $x=QZ$ により(14)は $\dot{Z}(t)=\widetilde{A}(t)Z(t)+\check{B}u(t)\cdots\cdots\cdots(17)$ $(\widetilde{A}=Q^{-1}(AQ-\dot{Q})$, $\check{B}=Q^{-1}B$ の関係がある.）

ただし $$\widetilde{A}(t)=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11}\cdots\cdots\widetilde{A}_{1r}\\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \widetilde{A}_{r1}\cdots\cdots\widetilde{A}_{rr}\end{bmatrix}\cdots\cdots(18)$$ ここで $$\widetilde{A}_{ii}=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots 0 & k_1{}^{ii}\\ 1 & 0\cdots\cdots 0 & k_2{}^{ii}\\ 0 & \ddots\quad\ddots\quad\vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots\quad\ddots\quad 0 & \\ 0\cdots\cdots 0 & 1 & k_{ni}{}^{ii}\end{pmatrix}$$ $(n_i\times n_i$ 行列)

$$i\fallingdotseq j,\quad \widetilde{A}_{ij}=\begin{pmatrix}0\cdots 0 & k_1{}^{ij}\\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ 0\cdots 0 & k_{ni}{}^{ij}\end{pmatrix}(n_i\times n_j\ \text{行列}),\quad \check{B}=\begin{pmatrix}\check{B}_1 & 0\cdots 0\\ 0 & \check{B}_2\cdots 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots\\ 0 & 0\cdots\check{B}_r\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(19)$$ ここで

$$\check{B}_i=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}(n_i\times 1\ \text{ベクトル})$$

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{nj}a_l{}^{ij}C_l{}^j=C_{ni}{}^i\widetilde{A}+\dot{C}_{ni}{}^i\qquad(i=1\cdots\cdots\cdots r)\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$C^i{}_j\widetilde{A}+\dot{C}^i{}_j=C_{j+1}{}^i\quad(i=1\cdots\cdots r:j=1\cdots\cdots n_i-1)\cdots\cdots\cdots(21)$$

(21)式より $C^i{}_1=[0\quad 0\cdots0\quad \underset{\sum_{j=1}^{i} n_j\text{番}}{1}\quad 0\cdots0]$ として行列 $C=\begin{pmatrix} C^1{}_1 \\ \vdots \\ C_{n1}{}^1 \\ \vdots \\ C^r{}_1 \\ \vdots \\ C_{nr}{}^r \end{pmatrix}$ ($n\times n$ 行列)を求める.

$|\det C|=1$ となる.

(20)式より $a_l{}^{ij}$ を求めて変換 $Z=C^{-1}y$ により(17)は $\dot{y}(t)=\hat{A}(t)y(t)+\tilde{B}(t)u(t)\cdots\cdots(22)$
($\hat{A}=(C\tilde{A}+\dot{C})C^{-1}$, $\tilde{B}=C\check{B}$ の関係あり.) となる. $\tilde{B}$は(9)と同じ形であるが×印は一般に恒等的に0でない t の関数となる. (11)のDの×印も同様に考えて $V=Du$ とおくと(22)は

$$\dot{y}(t)=\hat{A}(t)y(t)+\hat{B}v(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となり正規形になるという. しかし, この場合も節2と同様に $\tilde{B}(t)$が(9)の右辺とならないことが起り得る. 従って一般に正規形(23)は得られない. まず反例を挙げれば

$$A(t)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad n_1=3,\quad n_2=1,\quad Q^1{}_1=b_1=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^1{}_2=AQ^1{}_1-\dot{Q}^1{}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix},\quad Q^1{}_3=AQ^1{}_2-\dot{Q}^1{}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Q=[Q^1{}_1,\quad Q^1{}_2,\quad Q^1{}_3,\quad Q^2{}_1]$$

$$=[b_1,\ Q^1{}_2,\ Q^1{}_3,\ b_2]=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -e^{-2t} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \det Q=e^{-5t}\neq 0$$

(16)より $\begin{cases} k_1{}^{11}Q_1{}^1+k_2{}^{11}Q_2{}^1+k_3{}^{11}Q_3{}^1+k_1{}^{21}Q_1{}^2=AQ_3{}^1-\dot{Q}_3{}^1 \\ k_1{}^{12}Q_1{}^1+k_2{}^{12}Q_2{}^1+k_3{}^{12}Q_3{}^1+k_1{}^{22}Q_1{}^2=AQ_1{}^2-\dot{Q}_1{}^2 \end{cases}$ これから $k_l{}^{ij}$ を求める. 第1式は

$$k^{11}{}_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2{}^{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}+k_3{}^{11}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1{}^{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, $k_1{}^{11}=e^{-t}$, $k_2{}^{11}=-e^{-t}$,

$k_3{}^{11}=1$, $k_1{}^{21}=0$　第2式より　$k_1{}^{12}=0$, $k_2{}^{12}=3e^{2t}$, $k_3{}^{12}=-e^{2t}$, $k_1{}^{22}=1$　これを(17)に代入

$$\tilde{A}(t)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & 0 & -e^{-t} & 3e^{2t} \\ 0 & 1 & 1 & -e^{-2t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\quad \text{(21)式より}C^i{}_j\text{を求めて}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -e^{2t} \\ 1 & 1 & 1-e^{-t} & -e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}(t)=C\check{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-e^{2t}} \\ 1 & -e^{2t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, $\boxed{-e^{2t}}$があるため(22)は如何なるDをとっても正規形(23)は変換が出来ないことがわかる. 条件(13)を加えると正規形(23)が得られることを例で示す.

$A(t)$, $B(t)$は前例と同じであるが，$n_1=2$, $n_2=2$ とする　$Q^2{}_2=AQ^2{}_1-\dot{Q}^2{}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ となり，$Q=[Q^1{}_1,\ Q^1{}_2,\ Q^2{}_1,\ Q^2{}_2]=\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&-e^{-2t}&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, $\det Q=e^{-3t}$, (16)の

$$\left\{\begin{array}{l}k_1{}^{11}Q^1{}_1+k_2{}^{11}Q^1{}_2+k_1{}^{21}Q^2{}_1+k_2{}^{21}Q^2{}_2=AQ^1{}_2-\dot{Q}^1{}_2\\ k_1{}^{12}Q^1{}_1+k_2{}^{12}Q^1{}_2+k_1{}^{22}Q^2{}_1+k_2{}^{22}Q^2{}_2=AQ^2{}_2-\dot{Q}^2{}_2\end{array}\right.$$

より $k_1{}^{11}=0$, $k_2{}^{11}=3$, $k_1{}^{21}=e^{-2t}$, $k_2{}^{21}=-e^{-2t}$, $k_1{}^{12}=-e^{-t}$, $k_2{}^{12}=e^t+6e^{2t}$, $k_1{}^{22}=4$, $k_2{}^{22}=-3$　これを(17)に代入

$\widetilde{A}(t)=\begin{pmatrix}0&0&0&-e^{-t}\\1&3&0&6e^{2t}+e^t\\0&e^{-2t}&0&4\\0&-e^{2t}&1&-3\end{pmatrix}$ (21)式を用いてCを求めると　$C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&3&0&6e^{2t}+e^t\\0&0&0&1\\0&-e^{-2t}&1&-3\end{pmatrix}$

det C=1, (20)より $a_l{}^{ij}$ を求めて　$\widehat{A}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&3&12e^{2t}+e^t-e^{-t}&6e^{2t}+e^t\\0&0&0&1\\3e^{-2t}&-e^{-2t}&4&-3\end{pmatrix}$, $\widetilde{B}(t)=C\check{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$ となるから $D=E_2$ にとり式(22)は正規形(23)に変換可能であることがわかる．

条件(13)をいれねばならぬ理由は節2と殆んど同様であり，例えば　$n_1=5$, $n_2=3$, $n_3=2$ のとき

$$C=\left(\begin{array}{ccccc|ccc|cc}0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\times&0&0&\times&0&\times\\0&0&1&\times&\times&0&\times&\times&\times&\times\\0&1&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\1&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\times&0&1&\times&0&\times\\0&0&0&\times&\times&1&\times&\times&\times&\times\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&\times&0&0&\times&1&\times\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\times\text{印は}\\\text{一般に}\\0\text{でな}\\\text{い関数}\end{array}\right)\text{となり，}\widetilde{B}=C\check{B}=\left(\begin{array}{cclcl}0&0&&0&\\0&0&&0&\\0&0&&\times&\rbrace\\0&\times&\rbrace&\times&\rbrace\cdots n_1-n_3\\1&\times&\rbrace n_1-n_2&\times&\rbrace\\0&0&&0&\\0&0&&0&\\0&1&&\times&\rbrace\cdots n_2-n_3\\0&0&&0&\rbrace\\0&0&&1&\end{array}\right)$$

となる．従って$\left\{\begin{array}{l}n_1-n_2\leqq 1\\ n_1-n_3\leqq 1\end{array}\right.$とせねばならぬからである．

4. ま と め

証明を精細に追うことにより，反例を思いついたのであるが，成り立たせるための付加条件として(13)を挙げることができた．条件(13)は　(i)　$n_1=n_2=\cdots\cdots=n_r$（nはrの倍数）(ii)　$n_1=n_2+1$, $n_2=n_3=\cdots\cdots=n_r$　($n-1$がrの倍数)　に分けられる．そのため，適用範囲

がせばめられてしまう．もっと適用範囲拡大のための条件が必要である．

著者は本論文の主要部分をすでに発表している⑼が，定常系については，Asseo 氏⑺の方法の不備を示し，さらに拡張した Curran & Franklin 両氏の方法⑽にならい改善を試みている．非定常については，単一入力の場合に変形可制御行列と変換行列が一致することを示した Chao & Liu 両氏の論文⑾に注目し拡張を考察している．

参 考 文 献

(1) L. M. Silverman, "Transformation of time-variable system to canonical (phase-variable) form", IEEE Trans. Vol. AC-11, 1966, PP. 300—303.

(2) B. Ramaswami and K. Ramar, "Transformation to phase-variable canonical form", IEEE Trans. Vol. AC-13, 1968, PP. 746—747.

(3) B. Ramaswami and K. Ramar, "On the Transfarmation of Time-Variable Systems to the Phase-Variable Canonical Form", IEEE Trans. Vol. AC—14, 1969, PP. 417—419

(4) 山岸　亘，"非定常線形制御系の正規形への変換について"，長野高専紀要 No 3. 1969, PP. 223—231.

(5) 山岸　亘，"非定常線形制御系の正規形への変換について"，日本機械学会講演論文集 No. 70—7—1 PP. 37—40, 1970

(6) D. G. Luenberger, "Canonical Forms for Liner Multivariable Systems", IEEE Trans. Vol. AC-12, 1967, PP. 290—293.

(7) S. J. Asseo, "Phase-Variable Canonical Transformation of Multicontroller Systems" IEEE Trans. Vol. AC-13, 1968, PP. 129—131.

(8) C. E. Seal and A. R. Stubberud, "Canonical Forms for Multiple-Input Time-Variable Systems", IEEE Trans. Vol. AC-14, 1969, PP. 704—707.

(9) 山岸　亘，線形制御系（多入力・多出力）の正規形への変換について"，日本機械学会講演論文集，No. 70—7—2 PP. 189—192.

(10) R. T. Curran and G. F. Franklin, "Comments on Phase-Variable Canonical Transformation of Multicontroller Systems", IEEE Trans. Vol. AC-16, 1971, PP. 108—111.

(11) K. S. Chao and D. K. Liu, "On the Modified Controllability Matrix and the Canonical Transformation of Liner Tire-Variable Systems", IEEE Trans. Vol. AC-16, 1971, PP. 100—101.