

# 環状磁心の寸法が実効透磁率へおよぼす影響

## —单相往復電流で磁化した場合—

山 本 行 雄\*

### The Variation of Effective Permeability with Dimension of Toroidal Core

#### —Magnetization by Single Phase Current—

Yukio Yamamoto

## 1. ま え が き

環状磁心は磁気増幅器に代表されるように、磁心に沿って磁束を一周させて使用する場合が多いが、ここでは磁束が磁心と空隙との双方を通過するいわゆる開磁路系を形成している状態で用いられる場合について考察している。これは送配電系統に事故の生じていない時、零相変流器の磁心に形成される磁路に相当する。

なお磁束ゲート形マグネットメータのような磁路<sup>(1)</sup>に関しては別の機会に述べたい。

零相変流器に関する検討は、その重要性の増大と共に種々おこなわれてきており、<sup>(2), (3)</sup> 使用状態での磁心の透磁率の不均一についても論じられている<sup>(4)</sup>が、磁心の実効透磁率を詳しく検討したものは見当たらない。

本文では環状磁心の窓枠内に単相交流電流を往復して通過させた場合、磁心の実効透磁率が幾何学的寸法によってどのように変化するかを考察し、実効透磁率は個々の磁心の磁気的特性に左右されず、磁心の寸法によって決定されることを実験との対応によって明らかにした。

## 2. 実効透磁率

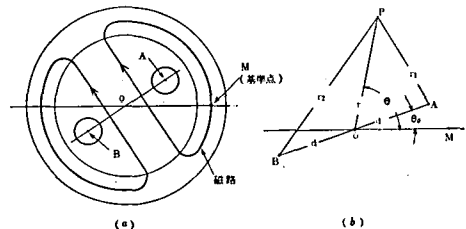
磁心は図1のように、A, Bを通り紙面に垂直に流れる往復一次電流によって磁化され、磁路は磁心を二分して形成される。

磁心上の点Pにおいて、一次電流の作る磁界をH、磁束密度をBとすると

$$\mu' = \mu_0 \mu_s' = B/H \quad (1)$$

によって磁心の実効透磁率  $\mu'$  と比実効透磁率  $\mu_s'$  を定義する。

実験に当たって、零相変流器としての実用上の見地から周波数は60Hzを使用した。また磁心の各部で透磁率に不均一のあることが考えられるが、測定においては磁心を四等分して90°毎にさぐりコイルを施し、それらから得られる値の平均を採用する。



磁路と寸法

図1

磁心は厚さ 0.1mm および 0.35mm のテープによる巻磁心を用い、うず電流等による損失は無視できるものとする。

図2は図1の構成で磁化した場合の一次電流と磁心の磁束密度との関係で、後述するように(式(7))、磁界と一次電流とは比例するから、どの磁心もこの場合の磁化特性はほぼ直線であるといえる。したがって実効透磁率は一次電流に無関係となる。

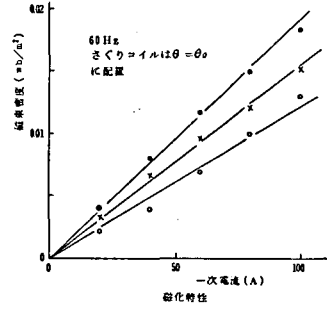


図2

### 3. 一次電流の形成する磁界と磁束密度

図1, (a)のように一次電流が流れる時、一次電流を十分長い平行直線電流とすると、これによって形成される磁界のベクトル・ポテンシャルは、一次電流に平行な成分  $A_z$  のみとなり

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

ただし、 $I$ :一次電流

で与えられる。(6)

図1, (b)において次式が成り立つ。

$$r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\theta - \theta_0) \quad (3)$$

$$r_2^2 = r^2 + d^2 + 2rd \cos(\theta - \theta_0) \quad (4)$$

(2), (3), (4)式から次が得られる(付録I参照)。

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \quad (5)$$

磁界の円周方向成分は

$$\begin{aligned} H_{\theta} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ &= \frac{I}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (6)$$

$\theta = \theta_0$  の位置では、磁界は円周方向成分のみとなり、ここでの磁界の大きさ  $H$  は

$$H = \frac{I}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1} \quad (7)$$

となる。図3に  $r$  による  $H$  の変化を示した。一次導体が磁心の窓枠の中央付近に配置され  $d \ll r$  とみなせる場合は、 $H = Id/\pi r^2$  とすることができ、 $H$  は  $r^2$  に反比例する。

次に磁心を無限長円筒(高さ  $h = \infty$ )とした場合、それぞれの領域におけるベクトルポテンシャルはやはり一次電流に平行な成分のみであり、次のように書ける。

磁心の窓枠内 ( $r \leq a$ ) では

$$A_{z1} = A_z + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 A_n r^n \cos n(\theta - \theta_0) \quad (8)$$

磁心の内部 ( $a \leq r \leq b$ ) では

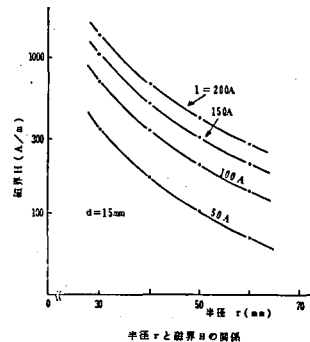


図3

$$A_{z2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n r^n \cos n(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n r^{-n} \cos n(\theta - \theta_0) \quad (9)$$

磁心の外部 ( $r \geq b$ ) では

$$A_{z3} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 D_n r^{-n} \cos n(\theta - \theta_0) \quad (10)$$

ただし、 $a$  : 磁心の内半径、 $b$  : 磁心の外半径、 $\mu$  : 減磁界補正をした磁心の透磁率、 $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  : 定数。

次の境界条件から定数  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  が求められる。

$$r=a \text{ において, } A_{z1} = A_{z2} \quad H_{\theta 1} = H_{\theta 2} \quad (11)$$

$$r=b \text{ において, } A_{z2} = A_{z3} \quad H_{\theta 2} = H_{\theta 3} \quad (12)$$

これから磁心内の磁束密度の円周方向成分  $B_{\theta}$  は次のようになる (付録Ⅱ参照)。

$$B_{\theta} = \frac{2}{\pi} \mu I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n-1}}{(\mu_s + 1)^2 b^{4n-2} - (\mu_s - 1)^2 a^{4n-2}} \{(\mu_s - 1)r^{2n-2} + (\mu_s + 1)b^{4n-2}r^{-2n}\} \times \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \quad (13)$$

$\mu_s \gg 1$  とし、 $\mu_s + 1 \doteq \mu_s$ ,  $\mu_s - 1 \doteq \mu_s$  とみなせば

$$B_{\theta} = \frac{2}{\pi} \mu_0 I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n-1}}{b^{4n-2} - a^{4n-2}} (r^{2n-2} + b^{4n-2}r^{-2n}) \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \quad (14)$$

となる。なお  $\mu_s$  は磁心の比透磁率である。

式(13)と式(14)は  $\mu_s$  によって差異を生ずるが、両式の比の値を  $\alpha$  とおき、 $r$  を平均半径 ( $= (a+b)/2$ ) にとり、内外径比  $K (= b/a)$  と  $\mu_s$  について  $\alpha$  を求めると、図4のように  $\mu_s$  が  $10^3$  程度になると1に収束する。 $10^3$  程度の  $\mu_s$  は一般の磁心では十分満足される条件であるから(14)式は實際上、可能な式であるといえる。したがって  $B_{\theta}$  は磁心の寸法  $a$ ,  $b$  によって決定されることになる。

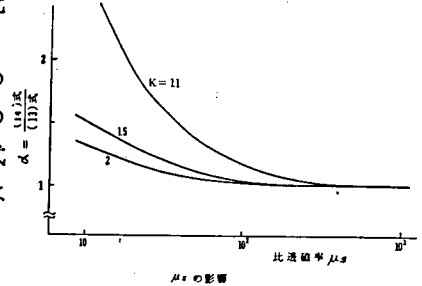


図4

#### 4. 無限長円筒磁心の実効透磁率

$B_{\theta}$ ,  $H_{\theta}$  は  $\theta = \theta_0$  の位置では、その点における磁束密度・磁界に一致する。したがって実効透磁率  $\mu_{\infty}'$  を  $\theta = \theta_0$  の位置で算出すれば(7), (14)式から

$$\begin{aligned} \mu_{\infty}' &= \frac{\frac{2}{\pi} \mu_0 I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n-1}}{b^{4n-2} - a^{4n-2}} (r^{2n-2} + b^{4n-2}r^{-2n})}{\frac{I}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1}} \\ &= 2\mu_0 r \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n-1}}{b^{4n-2} - a^{4n-2}} (r^{2n-2} + b^{4n-2}r^{-2n})}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2n-1}} \quad (15) \end{aligned}$$

$d \ll r$  ならば  $n=1$  とみなせるから、この場合には

$$\mu_{\infty}' \doteq 2\mu_0 \frac{r^2 + b^2}{b^2 - a^2} \quad (16)$$

となる。このように磁心の実効透磁率は、個々の磁気的特性に左右されず、内径と外径によ

って決定される。また(17)式において  $b/a = K$  とし、 $r$  を平均半径  $(a+b)/2$  とすると

$$\mu_{\infty}' = \mu_0 \frac{\frac{1}{2}(K+1)^2 + 2K^2}{K^2 - 1} \tag{17}$$

となり、 $K$  のみによって決定されることがわかる。したがって内径・外径が変化しても、両者の比が一定ならば実効透磁率は不変である。

### 5. 磁心の高さによる補正

前節では磁心の高さを無限大として実効透磁率を算出したが、これを高さが有限である実際の環状磁心について、実験によって求めた実効透磁率と比較してみると図5のようになり、差が生じている。これは高さが有限長であることにより減磁率が小さくなっているためと考えられる。高さによる実効透磁率の変化を実験によって補正を加えることにする。

磁心内の磁束密度分布を

$$B = \alpha' e^{-mz} + \beta' \tag{18}$$

と仮定する。ただし  $\alpha'$ 、 $\beta'$  は  $a$ 、 $b$  の関数である。

$B$  を磁心の高さについて平均すると

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{1}{h/2} \int_0^{h/2} B dz \\ &= \frac{\alpha'}{hm/2} (1 - e^{-\frac{h}{2}m}) + \beta' \end{aligned}$$

実効透磁率  $\mu'$  は  $\bar{B}/H$  で与えられ、 $H$  は  $h$  に無関係であるから

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\alpha'}{hm/2} (1 - e^{-\frac{h}{2}m}) + \beta \\ &= \left\{ \frac{\alpha}{hm/2} (1 - e^{-\frac{h}{2}m}) + 1 \right\} \beta \end{aligned} \tag{19}$$

と表わすことができる。

ここで

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mu' = \beta \tag{20}$$

であるから  $\beta$  は(17)式の  $\mu_{\infty}'$  と等しい。

次に実験から  $K$  と  $\mu_s'$  との関係は表1のように求められた。これから  $m$  を求めると  $m=180$  である。またこれによって決定される  $\alpha$  は約4.4であるが  $K$  によってバラツクため  $\alpha=4.4 \times (K-1)^{0.1}$  と補正する。

以上から次の実験式が求められる。

$$\begin{aligned} \mu' &= \left\{ \frac{4.4(K-1)^{0.1}}{180h/2} (1 - e^{-\frac{h}{2} \times 180}) + 1 \right\} \mu_{\infty}' \\ &= \left\{ 0.049 \frac{(K-1)^{0.1}}{h} (1 - e^{-90h}) + 1 \right\} \mu_{\infty}' \end{aligned} \tag{21}$$

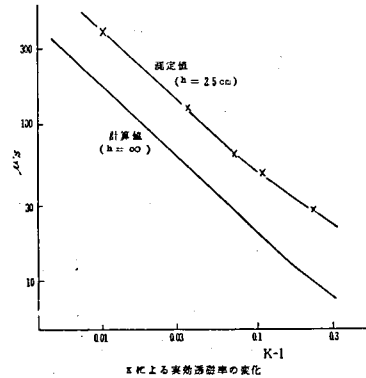


図5

表1  $K$  と  $\mu_s'$  との関係

$K$	$\mu_s'$
1.010	400
1.035	125
1.070	64

備)  $h=2.5\text{cm}$

この実験式を記したものが図6である。曲線AはNi-Fe合金、Bはけい素鋼板であるが、材質的な相違にも拘らず両者は同一の実験式でよく一致しており、実効透磁率が寸法によって決定されることを示している。実験式の決定にあたって  $h=2.5\text{cm}$ 、 $K$  は1.1より小さな磁心から定数を決めたが、図6では広い範囲にわたって(2)式が成りたつことがわかる。

### 6. 減磁率

減磁率に関しては次の式がある。(6)

$$H_e = H - \nu \frac{J}{\mu_0} \tag{22}$$

$$J = \chi H_e \tag{23}$$

ここに、 $H_e$  : 有効磁界、 $H$  : 外部磁界、 $\chi$  : 磁化率、 $J$  : 磁化の強さ

(22), (23)式より

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{H - H_e}{\chi H / \mu_0} \\ &= \frac{H - H_e}{(\mu_s - 1)H} \end{aligned} \tag{24}$$

$\mu_s + 1 \doteq \mu_s$  とすると

$$\begin{aligned} \nu &\doteq \frac{H}{\mu_s H_e} - \frac{1}{\mu_s} \\ &= \frac{1}{\mu_s'} - \frac{1}{\mu_s} \end{aligned} \tag{25}$$

本文でおこなったような実験では  $\mu_s'$  は  $\mu_s$  に比較してかなり小さく、この場合は

$$\nu \doteq 1/\mu_s' \tag{26}$$

となり、比実効透磁率の逆数で減磁率を表わすことができる。

$\mu_s'$  は図6のように  $K$  の小さな範囲ではかなり大きくなるが、一般に使用される磁心は  $K=1.3\sim 1.6$  程度が普通であるから (7) (26)式は十分精度をもった式として使えるはずである。

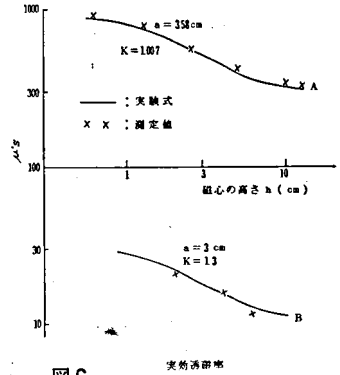


図6

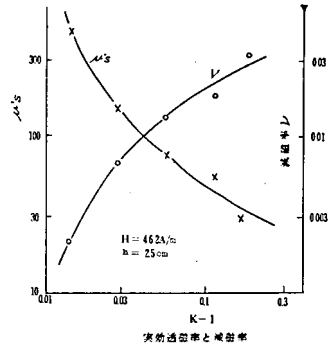


図7

### 7. あとがき

磁心の窓枠内を往復する単相電流で環状磁心を磁化した場合、磁心の高さを無限長とみなして実効透磁率を計算し、次に磁心の高さが有限長の場合について実験式を導いた。

この結果実効透磁率は、磁心の材質には影響されず、寸法によって決定され実験式ともよく一致する。

なお実効透磁率は  $\theta = \theta_0$ 、すなわち磁界が円周方向成分のみを有する位置において求められているが、これは計算の便宜上、および実験誤差を小さくするとの観点からおこなわれたものであり、他の位置でも同様の手法で計算・測定できよう。

一次導体間隔  $d$  を磁心の平均半径に比較して相当小さくとれる場合は  $\mu_{\infty}'$  の計算に  $n=1$  と近似可能であり簡便な式となり、 $d$  に無関係となるが、そうでない場合  $d$  によって実効透磁率は変動する。これは  $d$  によって磁路における空隙の占める割合が変化するためと考えられる。

おわりに、日頃御指導頂いている信州大学山田一助教授に御礼申し上げる次第である。

### 参 考 文 献

- (1) W. A. Geyger : IEEE Transaction Paper63—247 (1963)
- (2) 坪 内 : 電気試験所研究報告 第664号 (昭41)
- (3) 山 本 : 長野工業高等専門学校紀要 第2号 P95 (昭42)
- (4) 山本・山田 : 昭和44年電気四学会東海支部大会 4P—F—9 (昭44)
- (5) 竹 山 : 電磁気学現象理論 P244 (昭19)
- (6) 近 角 : 強磁性体の物理 P16 (昭34)
- (7) 高透磁率磁気材料専門委員会 : 電気学会誌80巻867号 P1845 (昭35)

### 付 録

[ I ] (5)式の導入

$$\begin{aligned}
 \log r_1 &= \log \{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\theta - \theta_0)\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log r^2 \left\{ 1 + \frac{d^2}{r^2} - \frac{d}{r} \cos(\theta - \theta_0) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log r^2 + \frac{1}{2} \log \left\{ 1 - \frac{d}{r} e^{j(\theta - \theta_0)} \right\} \left\{ 1 - \frac{d}{r} e^{-j(\theta - \theta_0)} \right\} \\
 &= \log r + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( -\frac{d}{r} \right)^n e^{jn(\theta - \theta_0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \frac{d}{r} \right)^n e^{-jn(\theta - \theta_0)} \\
 &= \log r - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{d}{r} \right)^n (\cos n(\theta - \theta_0) + j \sin n(\theta - \theta_0)) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{d}{r} \right)^n (\cos n(\theta - \theta_0) - j \sin n(\theta - \theta_0)) \\
 &= \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{d}{r} \right)^n \cos n(\theta - \theta_0) \tag{付1}
 \end{aligned}$$

同様にして

$$\log r_2 = \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left( \frac{d}{r} \right)^n \cos n(\theta - \theta_0) \tag{付2}$$

したがって (付1), (付2) から

$$\log \frac{r_1}{r_2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{d}{r} \right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \tag{付3}$$

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} \\
 &= -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{d}{r} \right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) \tag{付4}
 \end{aligned}$$

[ II ] (4)式の導入

(8)~(12)式によって次が成り立つ

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{d}{a} \right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 A_n a^n \cos n(\theta - \theta_0) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n a^n \cos n(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n a^{-n} \cos n(\theta - \theta_0) \tag{付5}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n b^n \cos n(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n b^{-n} \cos n(\theta - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 D_n b^{-n} \cos n(\theta - \theta_0) \quad (\text{付6})$$

$B_\theta = \text{rot}_\theta A_z = -\partial A_z / \partial r$  であり、 $r < a$  と  $r > b$  では  $H_\theta = B_\theta / \mu_0$ 、 $a < r < b$  では  $H_\theta = B_\theta / \mu$  であるから、この条件を考慮して

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I}{\pi a} \left(\frac{d}{a}\right)^{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n a^{n-1} \cos n(\theta - \theta_0) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n a^{n-1} \cos n(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n a^{-n-1} \cos n(\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (\text{付7})$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} n B_n b^{n-1} \cos n(\theta - \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} n C_n b^{-n-1} \cos n(\theta - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n D_n b^{-n-1} \cos n(\theta - \theta_0) \quad (\text{付8})$$

(付5)~(付8)を解いて

$$B_{2n} = C_{2n} = 0$$

$$B_{2n-1} = \frac{-I}{\pi(2n-1)} \frac{2\mu_0(\mu - \mu_0)d^{2n-1}}{(\mu + \mu_0)^2 b^{4n-2} - (\mu - \mu_0)^2 a^{4n-2}} \quad (\text{付9})$$

$$C_{2n-1} = \frac{I}{\pi(2n-1)} \frac{2\mu_0(\mu + \mu_0)d^{2n-1} b^{4n-2}}{(\mu + \mu_0)^2 b^{4n-2} - (\mu - \mu_0)^2 a^{4n-2}} \quad (\text{付10})$$

次に

$$B_\theta = H_\theta \mu$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \mu B_{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) r^{2n-2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \mu C_{2n-1} \cos(2n-1)(\theta - \theta_0) r^{-2n} \end{aligned} \quad (\text{付11})$$

(付11)に(付9)、(付10)を代入して(3)式が得られる。