

曲げねじりを考慮したたわみ角法

山 崎 英 樹*

Slope-Deflection Method in Consideration of Bending-Torsional Moment

Hideki Yamazaki

1. ま え が き

構造物に生ずるねじりモーメントについて考察すると、部材断面が自由にそることができる場合の単純ねじりモーメント（サンプナンのねじりモーメント）、および断面のそりが拘束された場合の曲げねじりモーメントがあることは周知の通りである。

構造解析に当っては、曲げねじりモーメントの扱いについては、計算の繁雑になるのをさけるためと、ねじり応力におよぼす影響が小さいものと見て通例これを無視している。しかし構造によっては無視できない場合も多いので、これを考慮した計算方法の簡易化は重要なことと思われる。

一般に構造解析にあたっては、変形法の1種であるたわみ角法にサンプナンねじりモーメントを考慮した解法⁽³⁾が有力な解法の一つである。

薄肉開断面部材から成る構造においては、この解法を用いて曲げねじりモーメントの影響を容易に計算することができるので、以下に簡単なラーメンについて例解する。

2. ねじりモーメントとねじれ角

たとえば、図-1に示すようにH型鋼の端部にねじりモーメント M_t が作用した場合に断面のそりを拘束すると、 M_t はサンプナンのせん断応力によるねじりモーメントとフランジの曲げによって生ずるせん断応力による偶力とつりあいを保つようになる。

すなわち

$$M_t = GJ\theta - \frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (1)$$

ここに、 G ：せん断弾性係数

J ：ねじり抵抗係数

E ：弾性係数

I_f ：H型鋼のフランジの y 軸に関する断面二次モーメント

h ：H型鋼の高さ

θ ：単位長さ当りのねじれ角

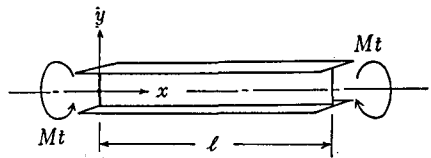


図1

が成り立つ。

式(1)の一般解は

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} \right) \quad (2)$$

$$\alpha^2 = \frac{EI_t h^2}{2GJ} \quad (3)$$

である。式(3)に示される α は長さの次元を持ち部材の断面形によって定まる値である。

次に、任意断面のねじれ角を θ としてこれを求めることにする。

単位長さ当たりのねじれ角 $\theta = d\theta/dx$ なるゆえ式(2)を積分して次式を得る。

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \left[x + \frac{\alpha \sinh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right) \right] \quad (4)$$

部材端におけるねじれ角は上式において、 $x=l$ とすればよい。

したがって

$$\theta_{x=l} = \frac{M_t}{GJ} \left[l - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right) \right] \quad (5)$$

となる。

式(5)を変形して

$$M_t = \frac{GJ \theta_{x=l}}{l - \alpha \tanh(l/\alpha)} \quad (6)$$

を得る。

式(6)の M_t は、サンブナンのねじりモーメントと曲げねじりモーメントとによってつりあうねじりモーメントである。

いま、ある構造物を解いて部材端に生ずるねじりモーメントを求めた場合に、これをサンブナンのねじりと曲げねじりとに分解する必要があるときには、次のようにして計算することができる。

サンブナンのねじりモーメントは

$$M_{ts} = GJ \theta \quad (7)$$

であるから、これに式(2)を代入すると

$$M_{ts} = M_t \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} \right) \quad (8)$$

が得られる。

次に、曲げねじりモーメントは

$$M_{tb} = -\frac{EI_t h^2}{2} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (9)$$

であたえられる。

一方式(2)を用いて

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GJ} \frac{1}{\alpha} \frac{\sinh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)}, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{M_t}{GJ} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\cosh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)}$$

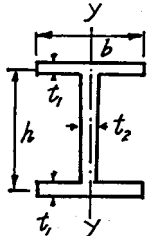
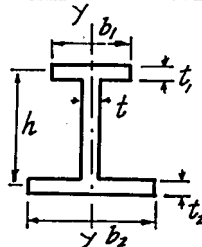
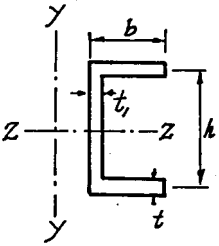
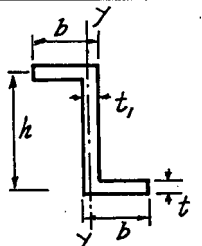
となるから、これを式(9)に代入して

$$M_{tb} = M_t \frac{\cosh\left(\frac{l-x}{\alpha}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} \tag{10}$$

を得る。すなわち、式(8)、式(10)が求める計算式である。

以上は図-1に示すH型断面について計算したのであるが、上に得られた各式は任意の断面の部材について成りたつものである。ただし α の値は断面形によって定まる値であるので注意しなければならない。表-1に α 、 I 、 J の例を示した。

表1

断面	断面図	α^2	I	J
H型		$\frac{EIh^2}{2GJ}$	$\frac{t_1 b^3}{12}$	$\frac{1}{3}(2bt_1^3 + ht_2^3)$
I型		$\frac{EIh}{GJ} \frac{t_2 b_2^3}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$	$\frac{t_1 b_1^3}{12}$	$\frac{1}{3}(b_1 t_1^3 + ht^3 + b_2 t_2^3)$
溝型		$\frac{EI_f h^2}{2GJ} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4I_z}\right)$	$I_f = \frac{tb^3}{12}$ $I_z = \frac{t_1 h^3}{12} + \frac{bt_1 h^2}{2}$	$\frac{1}{3}(2bt_1^3 + ht_1^3)$
Z型		$\frac{EIh^2}{GJ} \frac{bt + 2t_1 h}{2bt + t_1 h}$	$\frac{tb^3}{12}$	$\frac{1}{3}(2bt_1^3 + ht_1^3)$

3. たわみ角法への適用

図一2(a)に示すような長さ l の部材 AB の端部にねじりモーメント M_{tA} , M_{tB} が作用し、この時のA端、B端のねじれ角を θ_A , θ_B とする。

サンブナンのねじりモーメントは

$$\left. \begin{aligned} M_{tA} &= \frac{GJ(\theta_A - \theta_B)}{l}, \\ M_{tB} &= \frac{GJ(\theta_B - \theta_A)}{l} = -M_{tA} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。

次に断面のそりを拘束した場合のねじりモーメントは、次のように求めることができる。

図一2(a)を同図(b)(c)のように、一端に M_{tA} または M_{tB} が単独に働く2つの片持ばりに分解して考えた後これらを合成すればよい。図一2を見ながら式(6)によってねじりモーメント式を立てると。

$$\left. \begin{aligned} M_{tB1} &= \frac{GJ\theta_{B1}}{l - \alpha \tanh(l/\alpha)} = -M_{tA1}, \\ M_{tA2} &= \frac{GJ\theta_{A2}}{l - \alpha \tanh(l/\alpha)} = -M_{tB2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。

さらに、重ね合わせの原理によって

$$M_{tA} = M_{tA1} + M_{tA2}, \quad M_{tB} = M_{tB1} + M_{tB2} \quad (13)$$

であるから式(12)を用いて

$$\left. \begin{aligned} M_{tA} &= \frac{GJ(\theta_{A2} - \theta_{B1})}{l - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right)}, \\ M_{tB} &= \frac{GJ(\theta_{B1} - \theta_{A2})}{l - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となるが、ここで、 $\theta_{A2} = \theta_A$, $\theta_{B1} = \theta_B$ であるから式(14)は

$$\left. \begin{aligned} M_{tA} &= \frac{GJ(\theta_A - \theta_B)}{l - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right)}, \\ M_{tB} &= \frac{GJ(\theta_B - \theta_A)}{l - \alpha \tanh\left(\frac{l}{\alpha}\right)} = -M_{tA} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。次に上式において分母を、

$$l - \alpha \tanh(l/\alpha) = L \quad (16)$$

とおくと次式のようになる。

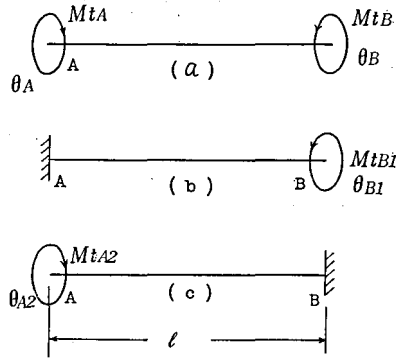


図2

$$\left. \begin{aligned} M_{tA} &= \frac{GJ(\theta_A - \theta_B)}{L}, \\ M_{tB} &= \frac{GJ(\theta_B - \theta_A)}{L} = -M_{tA}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)は、長さ L の部材 AB における端部ねじれ角とサンプナンのねじりモーメントの関係式と見ることができる。したがって、曲げねじりを含むねじりモーメント式を式(17)の形で表わしておくと、これと周知のたわみ角式とを併用することによって、立体ラーメンや格子構造等について曲げねじりモーメントの影響を考慮に入れた解を求めることが可能になるわけである。さらに必要に応じて式(8)、式(10)を用いることによって、得られたねじりモーメントをサンプナンねじりと曲げねじりとに分解することができるのは、すでに述べた通りである。

4. 計算例

図-3の平面ラーメンの節点 B に面に直角に荷重 P が作用する場合について解く。座標軸は図の如くとすることとし、ラーメン部材の諸元は表-2に示す通りである。

表2

部材	部材長	曲げ剛比	ねじり剛比
AB	h	k_b	k_t
BC	l	k_b'	k_t'

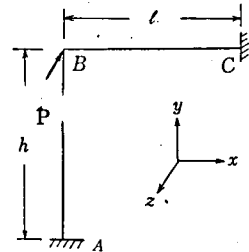


図3

4-1 たわみ角法による解

このラーメンの未知量は、節点 B におけるたわみ角 φ_{xB} 、 φ_{yB} と部材 AB の回転角 ψ_{xAB} の3つである。添字の x 、 y は回転軸を示す。以下 $\psi_{xAB} = \psi$ として計算を進める。

(1) 端モーメント式

$$\left. \begin{aligned} M_{xAB} &= k_b(\varphi_{xB} + \psi), & M_{xBA} &= k_b(2\varphi_{xB} + \psi), \\ M_{yAB} &= -2\beta k_t \varphi_{yB}, & M_{yBA} &= 2\beta k_t \varphi_{yB}, \\ M_{xBC} &= 2\beta k_t' \varphi_{xB}, & M_{xCB} &= -2\beta k_t' \varphi_{xB}, \\ M_{yBC} &= k_b'(2\varphi_{yB} + h/l \cdot \psi), & M_{yCB} &= k_b'(\varphi_{yB} + h/l \cdot \psi). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(2) 節点方程式

$$\Sigma M_{xB} = 0 = M_{xBA} + M_{xBC} : 2(k_b + \beta k_t') \varphi_{xB} + k_b \psi = 0. \quad (19)$$

$$\Sigma M_{yB} = 0 = M_{yBA} + M_{yBC} : 2(\beta k_t + k_b') \varphi_{yB} + h/l \cdot k_b' \psi = 0.$$

(3) 層方程式

図-4を見ながら端せん力式を立てる。

$$X_{zBA} = -(M_{xBA} + M_{xAB})/h,$$

$$X_{zBC} = -(M_{yBC} + M_{yCB})/l,$$

これを層方程式 $X_{zBA} + X_{zBC} - P = 0$ に代入して次式を得る。

$$3k_b \varphi_{xB} + 3k_b' \varphi_{yB} + 2(k_b + k_b' h/l) \psi = -Plh. \quad (20)$$

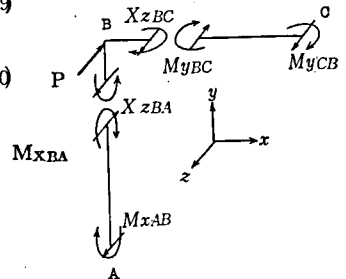


図4

式(19), (20), (21)の連立式の解は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xB} &= -\frac{l^2 h k_b (k_b' + \beta k_t)}{D} P, \quad \varphi_{yB} = -\frac{l h^2 k_b' (k_b + \beta k_t')}{D} P, \\ \psi &= \frac{2 l^2 h (k_b + \beta k_t') (k_b' + \beta k_t)}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ただし $D = 3 \{ l k_b^2 (k_b' + \beta k_t) + h k_b'^2 (k_b + \beta k_t') \}$
 $- 4 l (k_b + \beta k_t') (k_b' + \beta k_t) (k_b + k_b' h / l)$.

これを式(18)に代入して端モーメントが得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xAB} &= \frac{l^2 h k_b (k_b' + \beta k_t) (k_b + 2\beta k_t')}{D} P, \quad M_{xBA} = \frac{2 l^2 h k_b (k_b' + \beta k_t) \beta k_t'}{D} P, \\ M_{yAB} &= \frac{2 l h^2 k_t k_b' \beta (k_b + \beta k_t')}{D} P, \quad M_{xBC} = -\frac{2 l^2 h k_t' k_b \beta (k_b' + \beta k_t)}{D} P, \\ M_{yBC} &= \frac{2 l h^2 k_b' (k_b + \beta k_t') \beta k_t}{D} P, \quad M_{yCB} = \frac{l h^2 k_b' (k_b + \beta k_t') (k_b' + 2\beta k_t)}{D} P. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで, β は

$$\beta = \frac{G}{4E} = \frac{m}{8(m+1)} \quad m: \text{ポアソン数} \quad (33)$$

であって, 鋼のポアソン数を4とすると $\beta = 0.1$ となる。

式(32)を用いて, 部材の断面をH型として, サンプナンのねじりモーメント考慮した場合と断面のそりを拘束した場合について, それぞれ数値計算を行う。

4-2 断面のそりが自由な場合

図-5に示すような部材断面寸法とする。表-3は諸元および剛比であり表-5にこれらによって計算された端モーメントを示す。

表3

部材	部材長	I	J	K_b	K_t	k_b	k_t
A B	$h=600$	$I_x=38,800$	178	I_x/h	J/h	1	$\times 10^{-3}$ 4.59
B C	$l=400$	$I_y=38,800$	178	I_y/l	J/l	1.5	6.90

(註) A B部材の剛度を基準剛度とする ($\bar{K} = I_x/h$)

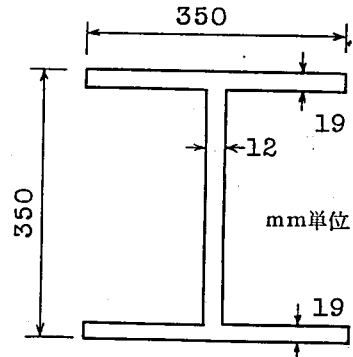


図5

4-3 断面のそりを拘束した場合

式(27)を用いて計算を行えばよい。この場合の部材長は, 式(26)によってあらわされるので次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{部材AB: } H &= h - \alpha \tanh(h/\alpha), \\ \text{部材BC: } L &= l - \alpha \tanh(l/\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで図-5のH断面について α の値を求めておく。

$$I_x = 1.9 \times 35^3 / 12 = 6789 \text{cm}^4 \text{ (フランジ1枚の断面2次モーメント)},$$

$$J = (2 \times 35 \times 1.9^3 + 31.2 \times 1.2^3) / 3 = 178 \text{cm}^4,$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2,$$

$$G = mE / 2(m+1) = 0.84 \times 10^6 \text{kg/cm}^2,$$

$$s=35\text{cm}(\text{H型鋼の高さ}).$$

これらにより

$$\alpha=s\sqrt{\frac{EI}{2GJ}}=242\text{cm}.$$

ラーメンの各部材長は式(4)により

$$H=6-2.42\tanh(6/2.42)=3.59\text{m},$$

$$L=4-2.42\tanh(4/2.42)=1.75\text{m}$$

となる。

ここで注意しなければならないことは、式(4)で計算された部材長とH型鋼断面の高さとの比がおおよそ5以上でなければならないということである。なぜならこの比が小さくなると、曲げによるたわみに対するせん断力の影響が大きくなるが、通常なたわみ角式にはこれが取り入れられていないために、たわみ角法が適用できなくなるからである。例題の場合は、 $L/s=1.75/0.35=5$ であるから適用することができる。

表-4に諸元および剛比を、表-5にこれらによって計算された端モーメントを示す。

表4

部 材	部 材 長	I	J	K_b	K_t	k_b	k_t
AB	$h=600$ $H=359$	38 800cm ⁴	178cm ⁴	I_x/h	J/H	1	7.68×10^{-3}
BC	$I=400$ $L=175$	38 800	178	I_y/l	J/L	1.5	15.70

(註) 基準剛度 $\bar{K}=I_x/h$

表5 (係数: P/1000)

端モーメント 条件	M_{xAB}	M_{xBA}	M_{yAB}	M_{yBA}	M_{xBC}	M_{xCB}	M_{yBC}	M_{yCB}	備 考
断面の そり自由(1)	- 7 380	- 10.17	- 10.15*	10.15*	10.17*	- 10.17*	- 10.15	-16 600	M_{ts} *
断面の そり拘束(2)	- 7 380	- 23.10	- 16.95**	16.95**	23.10**	- 23.10**	- 16.95	-16 600	$M_{ts}=M_{ts}$ $+M_{tb}$ **
(2)-(1) (1) × 100	0	127	67	67	127	127	67	0	

例題のラーメンが、部材断面のそりを許した場合とそりを拘束した場合とで同様な変形状態を生ぜしめた時、部材端に生ずる端モーメントには2つの場合に大きな差があることが表-5より明らかである。すなわち、後者には、フランジの曲げによって生ずるせん断力がかなり抵抗モーメントに影響をおよぼしていることがわかる。

5. あ と が き

構造物の曲げねじりモーメントを考慮する場合、式(4)であらわされるねじりモーメント式と周知なたわみ角式とを併用することによって容易にその影響を知ることができることを示し、簡単なラーメンについて例解した。

参 表 文 献

- (1) Timoshenko : Strength of Materials.
- (2) // : Theory of Elasticity.
- (3) 村上・吉田 : たわみ角法による格子の解法, コロナ社.
- (4) 坪 井 : 建築学大系9—I 建築弾塑性学, 彰国社.

(44. 8. 20 受理)