1・2 階常微分方程式の解の大域的存在について

山 岸 亘* 中 沢 喜 昌*

On the Global Existence of Solutions of First and Second Order Ordinary Differential Equations

Wataru Yamagishi and Yoshimasa Nakazawa

1. ま え が き

最近，2階の常微分方程式の解の大域的な存在定理が Schmitt 氏[1]によって発表された。その論文は幾何学的手法を用いている。それはある偏微分不等式を満足する曲面を2つ考え，$t=0$ における解の位相点がこの2つの曲面にはさまれていれば，解の軌道は大域的に存在することを定式化し，定理を導いたものである。

ここに我々は Schmitt 氏の与えた定理を解析的な方法を用いて証明した。その際，よく知られている1階の存在定理[2]も証明した。

最後に，この定理の応用として，有名な2つの大域的存在定理の証明を与えておいた。

2. 1階の大域的存在の主要定理

定理1 1階常微分方程式の初期値問題

$$x'=f(t,\ x)\quad \left(x'=\frac{dx}{dt}\right) \tag{E$_1$}$$

$$x(0)=v(0)\quad [x(0)=w(0)]$$

を考える。ここで $f(t,\ x)$は集合 $R=\{(t,\ x):0\leqq t<\gamma,\ |x|<\infty\}$ 上で定義された連続な実関数であり，$v(t)$は$[0,\ \gamma)$で微分可能かつ $v'(t)<f(t,\ v(t))$ $[w'(t)>f(t,\ w(t))]$を満足する関数とする。

このとき $x(t)$を(E_1)の任意の解とすると，$x(t)$の定義域と $(0,\ \infty)$ との共通部分において $v(t)<x(t)$ $[w(t)>x(t)]$が成りたつ。

証明 t を0から正の方向に増し，内点 t_0 において初めて$v(t_0)=x(t_0)$になるとし，矛盾を導く。

t_0 は $x(t)$の定義域の内点であるから，適当な $h>0$ をとるとき$[t_0-h,\ t_0+h]$で $f(t,\ v(t))$，$x'(t)$は一様連続となる。ゆえに $\varepsilon>0$ に対し，正数 $\delta(<h)$が定まり

$|t-t_0|<\delta$ のとき $|f(t,\ v(t))-f(t_0,\ v(t_0))|<\varepsilon/2$

$$|x'(t)-x'(t_0)|<\varepsilon/2 \tag{1}$$

$g(t)=x(t)-v(t)$とおくと $g(t_0)=0$

$0<t<t_0$ のとき $g(t)=g(t)-g(t_0)=(t-t_0)g'(\xi)\qquad t<\xi<t_0$

$$=(t-t_0)\{x'(\xi)-v'(\xi)\}$$

---

* 数学科

$0<t<t_0$ で $g(t)>0$　∴　$x'(\xi)-v'(\xi)<0$ (2)

仮定より　$f(\xi,\ v(\xi))-v'(\xi)>0$ (3)

(2)(3)より　$|f(\xi,\ v(\xi))-v'(\xi)|+|x'(\xi)-v'(\xi)|=f(\xi,\ v(\xi))-x'(\xi)$ (4)

$t_0-\delta<t<t_0$ とすると $|\xi-t_0|<\delta$　ゆえに $f(t_0,\ v(t_0))=f(t_0, x(t_0))=x'(t_0)$により

$$|f(\xi,\ v(\xi))-x'(\xi)|=|f(\xi,\ v(\xi))-f(t_0,\ v(t_0))+x'(t_0)-x'(\xi)|$$
$$\leqq|f(\xi,\ v(\xi))-f(t_0,\ v(t_0))|+|x'(\xi)-x'(t_0)|$$

(1)から　$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

よって(4)により　$|f(\xi,\ v(\xi))-v'(\xi)|<\varepsilon$

ε は任意だから $f(t_0,\ v(t_0))-v'(t_0)=0$ となり，仮定 $f(t,\ v(t))-v'(t)>0$ ($t\in[0,\ \gamma)$) に反する。　よって $v(t)<x(t)$が成りたつ。

t_0 が定義域の内点でなく境界点のときは，もし t_0 が定義域に含まれれば上の$[t_0-h, t_0+h]$を$[t_0-h,\ t_0]$として上と同様に議論すればよく，t_0 が定義域に含まれない場合は証明の必要がなくなる。

$w'(t)>f(t,\ w(t))$のとき $w(t)>x(t)$が成りたつことも同様に証明できる。

定理1の系　定理1において初期値「$x(0)=v(0)$」を「$x(0)=\alpha,\ v(0)\leqq\alpha$」〔「$x(0)=w(0)$」を「$x(0)=\alpha,\ w(0)\geqq\alpha$」〕にかえ，他は全く同一な定理が成りたつ。

証明　前定理の証明をみると，条件 $x(0)=v(0)$は "$g(0)=0$ から $0<t<t_0$ のとき $g(t)>0$" にのみ用い，他に一切使っていない。したがって $0<t<t_0$ のとき $g(t)>0$ が保証されるならよいわけである。条件 $x(0)=\alpha,\ v(0)\leqq\alpha$ とかえても $g(t)=x(0)-v(0)=\alpha-v(0)\geqq0$ となり，$0<t<t_0$ のとき $g(t)>0$ が成りたつ。以上から $v(0)>\alpha$ とすることは出来ないことは容易にわかる。

定理1の系により定理4の特別の場合であり良く知られた次の存在定理が得られる。[2]

定理2　1階常微分方程式の初期値問題

$$x'=f(t,\ x) \qquad (\mathrm{E}_2)$$
$$x(0)=\alpha$$

を考える。ここで $f(t,\ x)$は集合R上で定義された連続な実関数であり，$[0,\ \gamma)$で定義された微分可能な関数 $v(t),\ w(t)$が存在して

$$v'(t)-f(t,\ v(t))<0<w'(t)-f(t,\ w(t)) \qquad (5)$$
$$v(0)<w(0) \qquad (6)$$

とする。このとき $v(0)\leqq\alpha\leqq w(0)$なる αに対し，(E_2)の解 $x(t)$は$[0,\ \gamma)$ 上で存在し，かつ $(0,\ \gamma)$で $v(t)<x(t)<w(t)$である。

証明　(E_2)の解 $x(t)$の存在最大区間を$[0,\ \delta)$とする。ここで $\delta<\gamma$

(5)と $v(0)\leqq\alpha\leqq w(0)$より $v(t),\ w(t)$は定理1の系の仮定を満たすから，$(0,\ \delta)$上で $v(t)<x(t)$　かつ $w(t)>x(t)$

$$\therefore\quad v(t)<x(t)<w(t) \qquad (7)$$

$t\to\delta$ のとき $x(t)$ は境界 ∂R へ収束するから単調増加列 $t_n\to\delta$ が存在し $|x(t_n)|\to\infty$となる。[(3)(4)]

$v(t),\ w(t)$は微分可能であるから$[0,\ \delta]$で有界である。

ゆえに $t\in[0,\ \delta]$に対し $|v(t)|<M,$　$|w(t)|<M$

(7)より $v(t_n)<x(t_n)<w(t_n)$　∴　$|x(t_n)|<M$　これは $\lim\limits_{n\to\infty}|x(t_n)|=\infty$ に反する。

ゆえに $\delta \geqq \gamma$ ，当然 $\delta \leqq \gamma$ でなければならないから $\delta=\gamma$
よって解 $x(t)$ の最大区間は $[0,\ \gamma)$ であり(7)が $[0,\ \gamma)$ で成りたつ。

3. 2階の大域的存在の主要定理

定理3　2階常微分方程式の初期値問題

$$x''=f(t,\ x,\ x')\quad \left(x'=\frac{dx}{dt},\ x''=\frac{d^2x}{dt^2}\right) \tag{E$_3$}$$

$$x(0)=\alpha,\ x'(0)=v(0,\ \alpha)$$

を考える。ここで $f(t,\ x,\ x')$ は集合 $Q=\{(t,\ x,\ x'):0\leqq t<\gamma,\ |x|+|x'|<\infty\}$ において連続であり，$v(t,\ x)$ は集合 R で偏微分可能，$Dv(t,\ x)\overset{def}{=}v_t(t,\ x)+v_x(t,\ x)v(t,\ x)-f(t,\ x,\ v(t,\ x))$ は R 上で常に $Dv(t,\ x)>0$ $[Dv(t,\ x)<0]$ が成りたつとする。ただし $v_t=\partial v/\partial t,\ v_x=\partial v/\partial x$ である。

このとき(E$_3$)の任意の解を $x(t)$ とすると，$x(t)$ の定義域と $(0,\ \infty)$ との共通部分において $v(t,\ x(t))>x'(t)$ $[v(t,\ x(t))<x'(t)]$ が成りたつ。

証明　定理1と同様に t を0から正の方向に増し，内点 t_0 において初めて $v(t_0,\ x(t_0))=x'(t_0)$ になるとし矛盾を導く。$g(t)=v(t,\ x(t))-x'(t)$ とおく。

t_0 は $x(t)$ の定義域の内点であるから $h>0$ を適当にとると，$[t_0-h,\ t_0+h]$ において $g(t)$, $x''(t)$, $f(t,\ x(t),\ x'(t))$ は一様連続となる。ゆえに任意の $\varepsilon>0$ に対し，正数 δ が定まり

$$|t-t_0|<\delta \text{ のとき }\ |g(t)|=|g(t)-g(t_0)|<\varepsilon,\ |x''(t)-x''(t_0)|<\varepsilon$$
$$|f(t,\ x(t),\ x'(t))-f(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0))|<\varepsilon \tag{8}$$

ただし δ は $\delta<h$ にとっておく。

$$0<t<t_0 \text{ のとき }\ g(t)=g(t)-g(t_0)=(t-t_0)g'(\xi)\qquad t<\xi<t_0$$
$$=(t-t_0)\{v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,x(\xi))x'(\xi)-x''(\xi)\}$$

$0<t<t_0$ で　$g(t)>0$

$$\therefore\ v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,\ x(\xi))x'(\xi)-x''(\xi)<0 \tag{9}$$

仮定より　$v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,\ x(\xi))v(\xi,\ x(\xi))-f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi))>0$　(10)

(9)(10)より

$$|v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,\ x(\xi))v(\xi,\ x(\xi))-f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi))|$$
$$+|v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,\ x(\xi))x'(\xi)-x''(\xi)|$$
$$=v_x(\xi,\ x(\xi))\{v(\xi,\ x(\xi))-x'(\xi)\}+x''(\xi)-f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi)) \tag{11}$$

$v_x(t,\ x(t))$ は $Dv(t,\ x)$ が R 上で定義されているので，$t\in[t_0-h,\ t_0+h]$ で有界である。

すなわち　$|v_x(t,\ x(t))|<M$

$t_0-\delta<t<t_0$ とする。このとき上の(8)(9)(10)(11)が成りたつ。(11)の右辺を評価する。

(11)の右辺の絶対値

$$\leqq|v_x(\xi,x(\xi))||v(\xi,\ x(\xi))-x'(\xi)|+|x''(\xi)-x''(t_0)|+|x''(t_0)-f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi))|$$
$$\leqq M|g(\xi)|+|x''(\xi)-x''(t_0)|+|f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi))-f(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0))|$$

(8)より　$<(M+2)\varepsilon$

$$\therefore\ |v_t(\xi,\ x(\xi))+v_x(\xi,\ x(\xi))v(\xi,\ x(\xi))-f(\xi,\ x(\xi),\ x'(\xi))|<(M+2)\varepsilon$$

$\varepsilon\to0$ とするとき，δ は $\delta\to0$ にとれるから $t_0-\delta<\xi<t_0$ より

$$v_t(t_0,\ x(t_0))+v_x(t_0,\ x(t_0))v(t_0,\ x(t_0))-f(t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0))=0$$

これは仮定に反する。t_0 が内点でない場合は定理1の最後に述べた注意がこの場合にも適用

できる。不等号が反対の場合も同様に証明できる。

定理3の系　定理3において，初期値「$x(0)=\alpha,\ x'(0)=v(0,\ \alpha)$」を「$x(0)=\alpha,\ x'(0)=\beta,\ v(0,\ \alpha)\geqq\beta$」　〔「$x(0)=\alpha,\ x'(0)=\beta,\ v(0,\ \alpha)\leqq\beta$」〕にかえ他は全く同一な定理がなりたつ。

証明　定理1の系と同様であるので省略。

定理4　2階常微分方程式の初期値問題

$$x''=f(t,\ x,\ x') \tag{E$_4$}$$
$$x(0)=\alpha,\ x'(0)=\beta$$

を考える。$v(t,\ x)$，$w(t,\ x)$ は集合Rにおいて偏微分可能であり，次の3条件を満足するとする。

(i)　$v(0,\ x)<w(0,\ x)$　，　$a<x<b$

(ii)　$Dv(t,\ x)<0<Dw(t,\ x)$

(iii)　$-m(t)\leqq v(t,\ x)$かつ $w(t,\ x)\leqq m(t)$，$(t,\ x)\epsilon R$

ここで $m(t)$は$[0,\ \gamma)$の任意のコンパクトな部分区間で有界な正値関数とする。

このとき，$a<\alpha<b$，$\varphi(0,\ \alpha)\leqq\beta\leqq\psi(0,\ \alpha)$なる任意の$\alpha$，$\beta$に対して，$(E_4)$の任意の解$x(t)$は$[0,\ \gamma)$で存在し，$(0,\ \gamma)$上で $v(t,\ x(t))<x'(t)<w(t,\ x(t))$を満足する。

この定理の証明は Schmitt 氏の証明の大筋と同じであるが，幾何学的直観をとり入れているため証明は難解である。それゆえ，本論文は解析学的な見方で証明を与えておく。

証明　α，βを $a<\alpha<b$，$v(0,\ \alpha)\leqq\beta\leqq w(0,\ \alpha)$にとる。$x(t)$を (E_4) の1つの延長不能な解[5] とし存在の最大区間を$[0,\ \delta)$とする。$v(0,\ \alpha)\leqq\beta\leqq w(0,\ \alpha)$と条件(ii)は $v(t,\ x)$，$w(t,\ x)$が定理3の系の仮定を満たしているから

$$(0,\ \delta)\text{上で}\quad v(t,\ x)<x'(t)<w(t,\ x) \tag{12}$$

もし$\delta<\gamma$とすると，最大区間が右開きであるから $t_n<\delta$，$t_n\to\delta$ なる単調増加列が存在し，$|x'(t_n)|\to\infty$　一方条件(iii)と(12)から$|x'(t_n)|\leqq m(t_n)$，$m(t)$は閉区間$[0,\ \delta]$で有界であるから $m(t_n)<M$，これは $|x'(t_n)|\to\infty$に矛盾するから $\delta=\gamma$

4. 応　用　例

定理2または定理4の応用として，よく知られた次の定理[6] を導いておく。

系1　微分方程式(E_2)の $f(t,\ x)$はRにおいて，$|f(t,\ x)|\leqq M(t)$を満足する$[0,\ \gamma)$上で連続な（広義）正値関数 $M(t)$でおさえられているとする。このとき(E_2)の初期値問題を満たす任意の解は$[0,\ \gamma)$上で存在する。

証明　αを任意に決める。$|\alpha|<q$ なる q を定め

$$v(t)=-2\int_0^t M(\tau)d\tau-(pt+q),\quad w(t)=2\int_0^t M(\tau)d\tau+(pt+q)$$

と定義する。ただし $p>0$ にとる。$v(t)$，$w(t)$は$[0,\ \gamma)$で定義され，その上で微分可能であり

$$v'(t)-f(t,\ v(t))=-2M(t)-p-f(t,\ v(t))$$

$|f(t,\ x)|\leqq M(t)$より　$-f(t,\ x)\leqq M(t)$

$$\therefore\quad v'(t)-f(t,v(t))\leqq-M(t)-p\leqq-p<0$$

同様に　$w'(t)-f(t,\ w(t))>0$

上の2つの不等式より(5)が成りたつ。また $v(0)=-q<\alpha<q=w(0)$ より(6)が成りたち定理2の仮定をすべて満たすから，定理2により(E_2)の任意の解は$[0, \gamma)$上で存在する。

系1において，$M(t)$が定数Mとなる特別の場合は良く知られた定理である。

系2　微分方程式(E_2)の $f(t, x)$はRにおいて連続関数でありかつ有界，すなわち $|f(t, x)|\leqq M$ とする。そのとき(E_2)の初期値問題を満たす解は$[0, \gamma)$に延長可能である。

系3　微分方程式(E_4)の $f(t, x, x')$ は集合Qにおいて $|f(t, x, x')|\leqq M(t)$ を満足するとする。ただし $M(t)$は$[0, \gamma)$上の（広義）正値連続な関数である。このとき(E_4)の初期値問題を満たす解はすべて$[0, \gamma)$上で存在する。

証明　$\alpha(\geqq 0)$，βを任意に決める。$|\beta|<q$ なる q を定め

$$v(t, x)=-\int_0^t M(\tau)d\tau-(pt+q), \qquad w(t, x)=\int_0^t M(\tau)d\tau+(pt+q)$$

を定義する。ただし $p>0$ とする。$v(0, x)=-q<\beta<q=w(0, x)$ が成りたち定理4の(i)を満たす。

$$Dv(t, x)=-M(t)-p-f(t, x, v)\leqq -p \qquad (\because\ -f(t, x, v)\leqq M(t))$$

$$Dw(t, x)=M(t)+p-f(t, x, w)\geqq p$$

ゆえに $Dv(t, x)<0<Dw(t, x)$となり(ii)を満たす。

条件(iii)にいう $m(t)$を$\int_0^t M(\tau)d\tau+(pt+q)$にとれば，$m(t)$は$[0, \gamma)$のコンパクトな部分区間で有界な正値関数となるから(iii)をみたす。

ゆえに定理4により結論が正しいことがわかる。

系4　微分方程式(E_4)の $f(t, x, x')$は集合Q上の連続関数でかつ有界であるとすれば(E_4)の初期値問題をみたす解はすべて$[0, \gamma)$上に延長可能である。

5. む　す　び

以上大域的な解の存在定理を1階，2階について証明したが，この方法は階数を増しても容易に拡張が可能であり，証明は同様に行なうことができる。それにつれて応用例もいろいろ考えられる。

参　考　文　献

(1) Klaus Schmitt, "On the Global Existence of Solutions of Second Order Ordinary Differential Equations." Journal of Differential Equations 5, pp. 476—482, 1969.

(2) Walter, W., "Differential-und Integralungleichungen." pp. 56—57, Springer, Berlin, 1964.

(3) Hartman, P., "Ordinary Differential Equations." pp. 12—15, John Wiley, New York, 1964.

(4) Petrovski, I.G., "Ordinary Differential Equations." pp. 30—33, Prentice-Hall, 1966.

(5) Pontryagin, L.S., "Ordinary Differential Equations." Addison-Wesley, 1962. ポントリャーギン著，千葉克裕訳「常微分方程式」pp162—167，共立出版，1968.

(6) Coddington, E.A. and Levinson, N., "Theory of Ordinary Differential Equations." pp. 13—15, pp. 43—48, McGraw-Hill, New York, 1955.

(44. 9 .20　受理)