

Flat Panel Structure の解析と強度

風 間 悦 夫 *

On the Analysis of Flat Panel Structures

Etsuo Kazama

Some analytical methods of flat panel structures have been already researched by H. Wagner , P. Kuhn, H. Ebner etc.

There are many assumptions about structures in their methods so that the flat panel structures can be more easily analyzed. For instance, they treated the panel with shear flow theory or tension field theory.

In this report, the shear flow theory is also adopted concerning the panel; that is, the panel is subjected to shear stress only.

In their ways of analysis, moreover, the joints are assumed as smooth hinges and the beams are subjected to axial forces only. In actual cases, however, as the joints of the panel structures are usually rigid, the beams are subjected to both axial forces and bending moments.

In the analysis of this report, not only axial forces but also bending moments are adopted. The bending stress of beams is to be calculated in accordance with this theory.

At the end of the report, the truss with rigid joints, of which the diagonal members are the same weight as the panel, is analyzed and calculated.

From the results of these two kinds of calculation, the comparison between the truss and the panel structure is discussed from the viewpoint of strength of structure.

1. ま え が き

現在行なわれている薄板構造の簡単な計算方法は薄板にせん断流れ理論または張力、半張力場理論を適用している。一方、補剛材（はり）の応力は構造が静定または不静定問題として取り扱われるいずれの場合にも軸応力が支配的とされ曲げ応力は無視されている。⁽¹⁾

本研究で用いた理論は薄板がせん断座屈を起こす以前の状態で補剛材の曲げ応力をも計算しうる解法として工夫されたもので、⁽²⁾ 薄板に対してはせん断流れ理論が用いられ静定、不静定問題の区別なく薄板構造の解析ができる。本解法のもとに剛節トラスの両端を除く腹材がそれと同体積の薄板に置換された構造について計算しもとの剛節トラスの強度と比較を行なったので報告する。

* 機械工学科

2. 仮 定

薄板構造の解析にあたり次の仮定をおく

- (1) 荷重は縦、横補剛材の軸方向のみに加わる。すなわちその節点のみに加わると考える。
- (2) 薄板は純粋せん断応力の状態とし、各薄板の中ではそれぞれ一定のせん断流れであるとする。
- (3) 薄板を囲む補剛材は互いに剛節されており軸力による伸縮は考えないが曲げによる変形は考える。すなわちラーメン構造の解析における仮定と同じである。

3. 補剛材の弾性変形

3.1 上下弦材のの弾性曲線の方程式

計算を簡単にするために図1のような左右対称の構造が対称荷重を受ける場合を考える。図1のトラス型薄板構造を図2に示すように上弦材、下弦材、腹材、薄板の4種類の部分に切り離すとおのおのの部材は図2に示されるような断面力が生じている。このとき構造と荷重の対称性から断面力も対称的である。

ここに記号の意味は次のとおりである。

I, A, Z ; 上下弦材の慣性モーメント,
断面積, 断面係数

I_o, A_o, Z_o ; 腹材の慣性モーメント,
断面積, 断面係数

l, h, ha, t ; パネル長さ, 桁高さ,
斜材長さ, 板厚

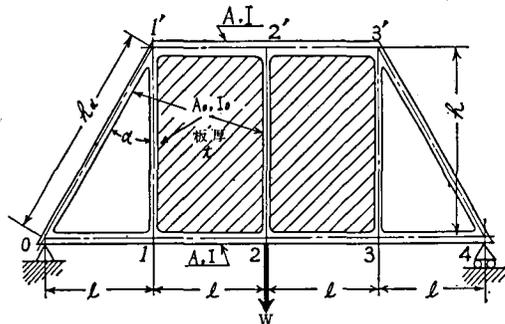
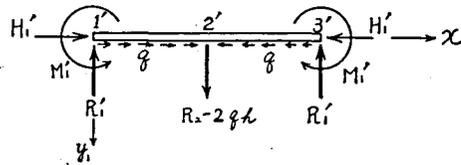
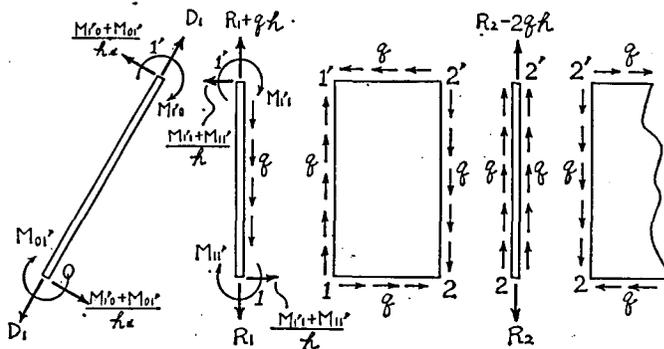


図1.

(図 1)



(図 2(a))



(図 2(b))

y_1, y_2, c ; 上下弦材
のたわみ, 積分定数

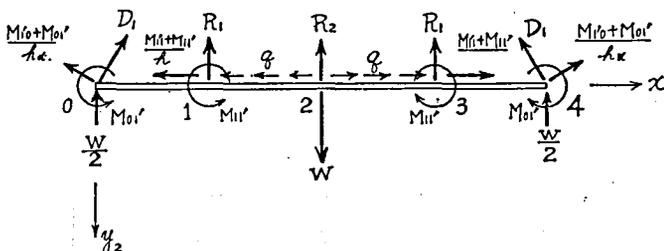
M ; 曲げモーメント

R, D ; 軸力

q ; せん断流

E, G ; 縦弾性係数,

せん断弾性係数



(図 2(c))

上弦材に図 2 (a)のごとく $x-y_1$ 座標を定め, 曲げモーメントを連続表示するためにフーリエ sine 級数に展開すると, (3)

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l(R_2 - 2qh)}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2l} - M_{11}'$$

上式を弾性曲線の微分方程式に用いて逐次積分を行なうと次式のように上弦材のたわみ角とたわみの式がえられる。

$$EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l(R_2 - 2qh)}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2l} + M_{11}'$$

$$EI \frac{dy_1}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8l^2(R_2 - 2qh)}{(n\pi)^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2l} + M_{11}'x + C_1' \quad (a)$$

$$EI y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16l^3(R_2 - 2qh)}{(n\pi)^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2l} + \frac{M_{11}'}{2} x^2 + C_1'x + C_2' \quad (b)$$

次に下弦材について図 2 (c)のように $x-y_2$ 座標を定め上弦材と同様にしたたわみ角とたわみを求める。

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8l(W - R_2)}{(n\pi)^2} - \frac{16lR_1}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{4M_{11}'}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{4l} + M_{01}'$$

$$EI \frac{dy_2}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{32l^2(W - R_2)}{(n\pi)^3} - \frac{64l^2R_1}{(n\pi)^3} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{16lM_{11}'}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{4l} + M_{01}'x + C_1 \quad (c)$$

$$EI y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{128l^3(W - R_2)}{(n\pi)^4} - \frac{256l^3R_1}{(n\pi)^4} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{64l^2M_{11}'}{(n\pi)^3} \sin \frac{n\pi}{4} \right] \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{4l} + \frac{M_{01}'}{2} x^2 + C_1x + C_2 \quad (d)$$

3.2 腹部材のたわみ角と軸方向の変形

薄板を囲む補剛材以外の部材 1'-0, 0-1 は軸力による伸縮を考える。斜材 1'-0 の部材回転角は次のようにして与えられる。

図 3 に示される軸力 S_{ik} を受ける腹部材 $i-k$ の両端の変位 $(\Delta x_i, \Delta y_i), (\Delta x_k, \Delta y_k)$ による部材回転角 φ_{ik} と部材変化長さ Δl は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ik} &= -(\Delta x_k - \Delta x_i) \frac{\sin \phi}{l_{ik}} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \frac{\cos \phi}{l_{ik}} \\ \Delta l_{ik} &= (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \phi + (\Delta y_k - \Delta y_i) \sin \phi \\ \Delta l_{ik} &= \frac{S_{ik} l_{ik}}{EA_{ik}} \end{aligned} \right\} (e)$$

部材 $i-k$ の部材端 i における接線角 τ_{ik} は部材端 i, k における端モーメントをそれぞれ M_{ik}, M_{ki} (時計方向を正とする) とすると次式で与えられる。

$$\tau_{ik} = \frac{l_{ik}}{3EI_{ik}} \left(M_{ik} - \frac{M_{ki}}{2} \right)$$

ここに接線角 τ_{ik} の符号は時計方向を正とする。

腹部材の部材端 i のたわみ角 θ_{ik} は接線角 τ_{ik} と部材角 φ_{ik} との和で与えられるから

$$\theta_{ik} = \tau_{ik} + \varphi_{ik} \quad (f)$$

となる。

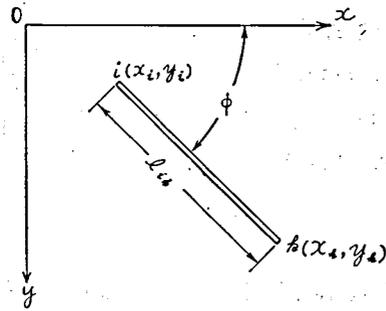
3.3 薄板のせん断流の誘導

薄板を囲む上下弦材の節点の垂直方向変位は3.1節の(b)または(d)式によって与えられる。一方2節の仮定により図4に示す上弦材の節点 $i, i+1$ の変位 y_i, y_{i+1} と下弦材の節点 $k, k+1$ の変位 y_k, y_{k+1} とはそれぞれ等しい。よって薄板のせん断ひずみ γ は次式で与えられる。

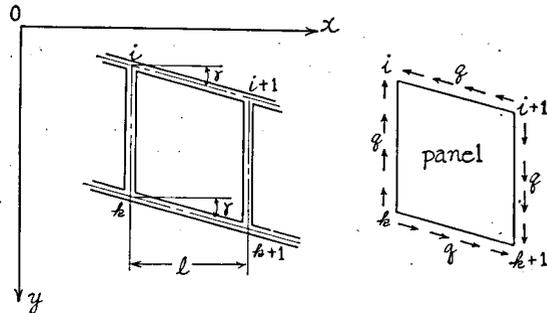
$$\gamma = \frac{y_{i+1} - y_i}{l} = \frac{y_{k+1} - y_k}{l}$$

ゆえにせん断流れ q は次式のようになる。

$$q = G\gamma t = \frac{Gt}{l} (y_{i+1} - y_i) \quad \text{または} \quad \frac{Gt}{l} (y_{k+1} - y_k) \quad (g)$$



(図 3)



(図 4)

4. 適合条件式の誘導

3節に与えられた7個の式 (a), (b), ..., (g) を用いて適合条件式をたてる。図1のように構造と荷重状態が左右対称な場合には、構造の左右半分の適合条件を考えればよい。

いま、薄板構造の各部材は与えられた荷重のもとに弾性変形状態にあるものとする

節点1'において上弦材と腹部材のたわみ角の連続条件より

$$\left(\frac{dy_1}{dx} \right)_{x=0} = \theta_{1'o} = \theta_{1'1} \quad (1), (2)$$

上式は3節の(a)および(f)式によりM, R等の力に関する方程式となる。以下すべての適合条件式は未知力によって表わされる方程式に還元される。

節点2' において

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1} = 0 \quad (3)$$

下弦材の各節点においても同様な条件式が成り立つ、すなわち

$$\text{節点0 において } \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=0} = \theta_{01}' \quad (4)$$

$$\text{節点1 において } \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=1} = \theta_{11}' \quad (5)$$

$$\text{節点2 において } \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=2l} = 0 \quad (6)$$

次に2節の仮定のもとに変位に関する連続条件式は3・2の(e)式により与えられる。

節点1'-0' について

$$\Delta l_{1'0'} = \frac{D_1 h d}{EA_0}, \quad \Delta x_0 - \Delta x_{1'} = -\frac{H l}{EA}, \quad \Delta y_0 - \Delta y_{1'} = (y_2)_{x=0} - (y_1)_{x=0},$$

$$\phi = \pi/2 + \alpha$$

を(e)式に代入すると次のような条件式がえられる。

$$\frac{D_1 h d}{EA_0} = -\frac{H l}{EA} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \{(y_2)_{x=0} - (y_1)_{x=0}\} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad (7)$$

節点1'-1 について

$$(y_1)_{x=0} = (y_2)_{x=1} \quad (8)$$

節点2'-2 について

$$(y_1)_{x=1} = (y_2)_{x=2l} \quad (9)$$

薄板に関する適合条件式は3・3の(8)式より

$$q = \frac{G t}{l} [(y_2)_{x=2l} - (y_2)_{x=1}] \quad (10)$$

となる。また下弦材の境界条件は次式で与えられる。

$$(y_2)_{x=0} = 0 \quad (11)$$

次に数個の節点と上弦材に関して静的釣合条件式をたてる。

節点1' について (図5参照)

モーメントの釣合から

$$-M_{1'} + M_{1'0} + M_{1'1} = 0 \quad (12)$$

垂直方向の力の釣合から

$$R_{1'} + \frac{M_{1'0} + M_{01'}}{h a} \sin \alpha + R_1 + q h + D_1 \cos \alpha = 0 \quad (13)$$

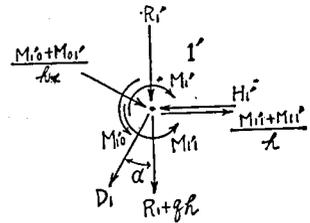
水平方向の力の釣合から

$$-H_{1'} + \frac{M_{1'1} + M_{11'}}{h} + \frac{M_{1'0} + M_{01'}}{h a} \cos \alpha - D_1 \sin \alpha = 0 \quad (14)$$

節点0 における水平方向の力の釣合から (図2(c)参照)

$$D_1 \sin \alpha + H_1 - \frac{M_{1'0} + M_{01'}}{h a} \cos \alpha = 0 \quad (15)$$

上弦材の垂直方向の力の釣合から (図2(a)参照)



(図 5)

$$2R_1' - (R_2 - 2qh) = 0 \quad (16)$$

以上(1)から(16)までの条件式によって未知量 $R_1, R_2, R_1', D_1, H_1', H_1, q, M_{1'0}, M_{01'}, M_{1'1}, M_{11'}, M_1', C_1', C_2', C_1, C_2$ (合計16個) に対してこれと同数の16個の方程式がえられた。

5. 薄板構造の数値計算例

図1に示す構造の諸元に次の数値を与える。

$$l = 27\text{cm}, h = 18\text{cm}, h_d = 9\sqrt{13}\text{cm}, A = 2.7\text{cm}^2, A_0 = 1.8\text{cm}^2$$

$$I = 0.50625\text{cm}^4, I_0 = 0.15\text{cm}^4, \sin\alpha = 3/\sqrt{13}, \cos\alpha = 2/\sqrt{13}$$

$$t = 0.12\text{cm}, E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2, G = 0.84 \times 10^6 \text{kg/cm}^2, W = 1\text{kg}$$

電子計算機により4節の16元連立方程式を計算すると次の解が得られる。なお方程式にあらわれる級数項はすべて収束値を用いている。

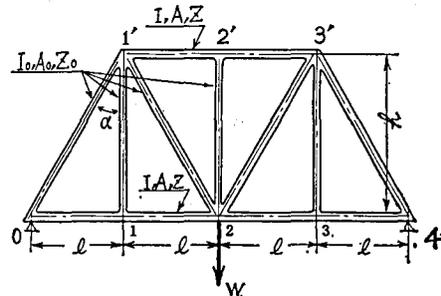
$M_{1'0} = -0.006203\text{kg}\cdot\text{cm}$	$R_1 = -0.000260\text{kg}$	$q = 0.027555\text{kg/cm}$
$M_{01'} = 0.004895''$	$R_1' = 0.002710''$	$C_1' = -0.714191\text{kg}\cdot\text{cm}^2$
$M_{1'1} = 0.032655''$	$R_2 = 0.997400''$	$C_1 = -0.264316''$
$M_{11'} = 0.038294''$	$D_1 = -0.898515''$	$C_2' = 20.460378\text{kg}\cdot\text{cm}^3$
$M_1' = 0.026452''$	$H_1' = 0.751529''$	$C_2 = 0''$
	$H_1 = 0.747588''$	

6. 薄板構造と剛節トラスの強度的比較

以上薄板構造の解法を説明し数値例についてその解を示したが、一方、薄板の代わりに薄板と等重量で慣性モーメント、断面積、断面係数が他の腹部材とそれぞれ等しいはりを図6のように用いた剛節トラスを上記薄板構造の解法と同様な方法⁽⁴⁾を用いて計算する。このとき、図6の構造の諸元の諸数値は5節に用いたものと等しくした。

図1および図6の2種類の構造が同じ荷重状態におかれる場合を数値計算しその結果から各部材の応力と下弦材の各節点のたわみを計算し表1～表4に示す。

表1, 2よりトラスと同重量の薄板構造の応力およびたわみを比較すると薄板構造では全部材に応力が分散し、トラスにおける応力集中は薄板構造にすることによって緩和されている。さらに、たわみを比較すると薄板構造はトラスのたわみより20～55%小さくなっている。これらの傾向は薄板により構造の一体化が高められたことが原因しているものと考えられる。



(図 6)

表 1 応力 (kg/cm²)
(荷重点: 節点 1, 荷重 W=1,000kg)

部 材	剛節トラス	薄板構造
1'2'	- 329.1	- 417.3
2'3'	- 328.7	- 285.2
0 1	608.9	533.0
1 2	602.7	486.9
2 3	148.2	311.1
3 4	168.7	187.9
1'0	- 827.6	- 810.9
1'1	583.8	658.7
1'2	- 282.7	
2'2	120.4	21.0
3'2	259.0	
3'3	- 63.5	413.7
3'4	- 259.5	- 275.7
左パネル		114.7(τ)
右パネル		116.8(τ)

表 2 応力 (kg/cm²)
(荷重点: 節点 2, 荷重 W=1,000kg)

部 材	剛節トラス	薄板構造
1'2'	- 741.5	- 623.1
0 1	310.5	346.7
1 2	459.6	617.5
1'0	- 519.4	- 519.9
1'1	182.9	384.2
1'2	564.5	
2'2	7.3	554.1
パネ ル		229.6(τ)

表 3 たわみ (mm)
(荷重点: 節点 1, 荷重 W=1,000kg)

節 点	剛節トラス	薄板構造
1	0.441	0.223
2	0.353	0.193
3	0.203	0.161

表 4 たわみ (mm)
(荷重点: 節点 2, 荷重 W=1,000kg)

節 点	剛節トラス	薄板構造
1	0.353	0.193
2	0.595	0.269

7. む す び

本研究は薄板構造の補剛材の曲げ応力を軸応力とともに計算しうる解法を説明したことおよび本解法を用いて数値計算を行なった結果、6節でも述べたように等重量のトラスとトラス型薄板構造では薄板構造の方が強度的に優れていることが結論される。このことは構造の軽量化の一つの方法を示してくれるものと考えられる。

しかし、ここに紹介した薄板構造の解法にも解析の前提となる仮定のとり方にいくらか問題点を含んでいる。その一つは薄板周辺の補剛材は軸方向の変形がないという取り扱い方である。

この仮定が適当であるか否かは実験により判断すべきことがらであろう。

筆者は薄板構造についていくらか実験を行なったが報告しうる結果は得ていない。

すべての補剛材の軸方向の変形を考慮する場合は現在研究中である。なお薄板の張力場理論の本解法への適用も研究したいと考えている。さらに、もう一度薄板構造に関して実験を行なう機会を待ち望んでいる次第である。

終りに研究課題を提供され種々御指導下さいました信州大学の宮入教授と原稿作成に協力された本校第1回卒業研究の学生諸君に深く謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 例えば機械工学便覧 第4編 第11章
- (2) 宮入武夫, 風間悦夫 “Flat Panel Structure の解法”
第6回構造の軽量化に関するシンポジウム 1965.
- (3) 宮入武夫, 関川三男 “はり問題におけるたわみ曲線の一元化による解法”
諏訪地方講演会前刷集 1964.
- (4) 宮入武夫, 風間悦夫 “剛節トラスの解析法 (二次応力問題の考察)”
第16回応用力学連合講演会前刷集 1966.