

糖度計光学系の設計計算について

鬼 頭 勇 *

Design and Error Calculations for the Optical System of Saccharimeter

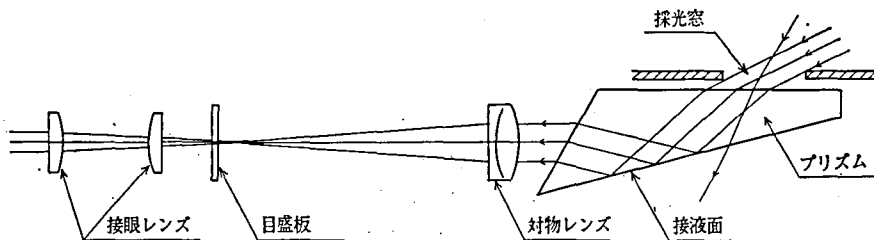
Isamu Kitou

1. ま え が き

糖度計光学系の設計計算法については、いままでまとめられたものがないので、その計算法を順序立て、それにもとずいて各要素の誤差が測定精度におよぼす影響を求める計算式を誘導してみた。

2. 糖度計の光学系

図1に示したものは糖度計の主要光学系であって、採光窓から入った光は糖液に接しているプリズム面（接液面）で反射または透過され、反射光はプリズムを出てから対物レンズによって集光され、対物レンズの焦点位置にある目盛板上に明部と暗部とからなる像をつくる。明部は接液



面に全反射臨界角以上で入射した光が集まって生じ、暗部は臨界角以下の光が接液面を透過して光が欠けることによって生ずる。この明暗部の境界線の位置は糖液の濃度（屈折率）に関係し、この位置の目盛尺の目盛を読み取れば糖液の濃度が求められる。

対物レンズとしては普通2枚接合色消レンズが用いられ、接眼レンズには外焦点型、たとえば Ramsden 型が使用される。

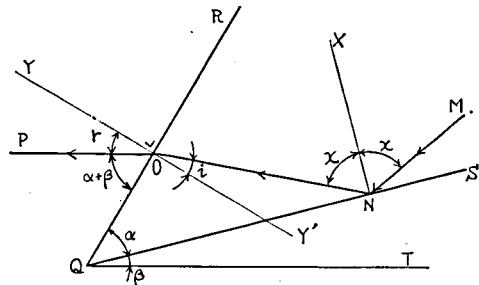
3. 光学系計算式

3-1 プリズムに関する計算

a. プリズム角の計算

糖度の測定範囲の中央の値に対する明暗境界線が目盛尺の中心にくるように、すなわち臨界全反射光がプリズムから出て対物レンズの光軸方向となるようにプリズム角を選定する。

図2において、MNは採光窓から入ってきた光で、これがN点で接液面QSに全反射臨界角で入射して全反射し、O点で屈折して対物レンズ光軸方向OPに向うものとする。またQTはOPに平行に引いた直線とする。



N点での全反射臨界角を x 、O点での入射角を i 、屈折角を r 、プリズム頂角を α 、プリズム取付角を β とし、中央濃度の糖液の屈折率を n_m 、プリズムガラスの屈折率を n_g で与えると、全反射臨界角の条件から

$$\sin x = n_m / n_g \quad (1)$$

また図2によって幾何学的に

$$i = x - \alpha, \quad r = 90^\circ - (\alpha + \beta)$$

ゆえに、屈折の法則によって

$$\sin [90^\circ - (\alpha + \beta)] = n_g \sin (x - \alpha)$$

これを变形して

$$\tan \alpha = \frac{n_g \sin x - \cos \beta}{n_g \cos x - \sin \beta} \quad (2)$$

よって、(1)式によって角 x を求め、角 β を適当に選定すれば、プリズム頂角は(2)式により決定される。 β の値としては $\alpha + \beta = 60^\circ$ 程度になるように選ぶのがよいようである。

b. 各濃度の糖液に対する臨界全反射光線の方向角の計算

図3に示すように、O点における屈折光線はOP'の方向に向い、対物レンズ光軸と角 θ をなす。この場合の糖液の屈折率を n_l とすれば

$$\sin x = n_l / n_g \quad (3)$$

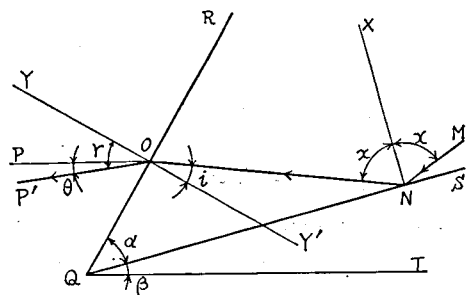
$$i = x - \alpha \quad (4)$$

$$\sin r = n_g \sin i \quad (5)$$

$$\theta = r + \alpha + \beta - 90^\circ \quad (6)$$

の関係が成りたち、方向角 θ を求めることができる。

この場合の糖液の屈折率 n_g の値は表1によって知ればよい。



3-2 目盛尺の計算

対物レンズとしては2枚接合の Fraunhofer 型がふつう用いられ、その設計法は望遠鏡用対物レンズの設計と同様である。

表 1

糖度 %	屈折率	糖度 %	屈折率	糖度 %	屈折率	糖度 %	屈折率
0	1.3330	21	1.3655	42	1.4036	63	1.4486
1	1.3344	22	1.3672	43	1.4056	64	1.4509
2	1.3359	23	1.3689	44	1.4076	65	1.5432
3	1.3374	24	1.3706	45	1.4096	66	1.4555
4	1.3388	25	1.3723	46	1.4117	67	1.4579
5	1.3403	26	1.3740	47	1.4137	68	1.4603
6	1.3418	27	1.3758	48	1.4158	69	1.4627
7	1.3433	28	1.3775	49	1.4179	70	1.4651
8	1.3448	29	1.3793	50	1.4200	71	1.4676
9	1.3464	30	1.3811	51	1.4221	72	1.4 00
10	1.3479	31	1.3129	52	1.4242	73	1.4725
11	1.3494	32	1.3847	53	1.4264	74	1.4749
12	1.3510	33	1.3865	54	1.4285	75	1.4774
13	1.3526	34	1.3883	55	1.4307	66	1.4799
14	1.3541	35	1.3902	56	1.4329	77	1.4125
15	1.3557	36	1.3920	57	1.4351	78	1.4850
16	1.3573	37	1.3939	58	1.4373	79	1.4876
17	1.3590	38	1.3958	59	1.4396	80	1.4901
18	1.3606	39	1.3978	60	1.4418	82	1.4954
19	1.3622	40	1.3997	61	1.4441	85	1.5033
20	1.3639	41	1.4016	62	1.4464	90	1.5170

いま、設計された対物レンズの焦点距離を f とし、方向角 θ の臨界全反射光線が対物レンズによってつくる像の光軸からの高さを y とすれば

$$y = f \tan \theta \quad (7)$$

の関係が成り立つから、目盛板の目盛は各濃度の糖液に対する θ によって求めた y に一致するよりに刻めばよい。

ただし、対物レンズの収差を考慮するときは、各 θ に対して三角追跡を行なってその目盛位置を定めてゆく必要がある。

4. 光学系の誤差

4-1 目盛の許容誤差

糖液の濃度測定においてその許容誤差が与えられるとき、目盛板の目盛の精度は次のように求められる。

濃度の許容測定誤差を糖液の屈折率の誤差に換算したものを Δn_i とすれば、(3)式より

$$n_g \sin x = n_i$$

n_g は一定であることを考慮して、この式の微分を求めれば

$$n_g \cos x \cdot \Delta x = \Delta n_i,$$

$$\therefore \Delta x = \frac{\Delta n_i}{n_g \cos x} \quad (8)$$

また(4)式により α は一定であるから

$$\Delta i = \Delta x \quad (9)$$

(5)式より、同様に

$$\Delta r = \frac{n_g \cos i}{\cos r} \cdot \Delta i \quad (10)$$

(6)式より

$$\Delta \theta = \Delta r \quad (11)$$

(7)式より、対物レンズの焦点距離は一定だから

$$\Delta y = \frac{f}{\cos^2 \theta} \cdot \Delta \theta \quad (12)$$

ここで(8)~(12)式をまとめれば

$$\Delta y = \frac{f \cos i}{\cos^2 \theta \cdot \cos r \cdot \cos x} \cdot \Delta n_i \quad (13)$$

ゆえに、指定された許容誤差 Δn_i に対する目盛の許容誤差 Δy が(13)式によって求められる。

4-2 プリズム角の誤差の影響

プリズム頂角 α の工作誤差およびプリズム取付角 β の誤差が y の値にどのように影響するかを考えてみる。

a. プリズム頂角 α の誤差

n_g と n_i とが指定されれば x は一定であるから、(4)式によって

$$\Delta i = -\Delta \alpha \quad (14)$$

また(6)式によって、 β は正確に取られたとすれば

$$\Delta \theta = \Delta r + \Delta \alpha \quad (15)$$

ここで、(14)、(10)、(15)、(12)式をまとめれば

$$\Delta y = \frac{f}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{n_g \cos i}{\cos r} \right) \Delta \alpha \quad (16)$$

この式によって測定値の誤差が求められ、またプリズム頂角の加工精度が与えられた場合の目盛を刻む精度が求められる。

b. プリズム取付角 β の誤差

x および α を一定と考えるから、(4)式によって i は一定となり、また(5)式によって r も一定となる。ゆえに、(6)式から

$$\Delta \theta = \Delta \beta \quad (17)$$

ここで(12)式と(17)式より

$$\Delta y = \frac{f}{\cos^2 \theta} \cdot \Delta \beta \quad (18)$$

となり、(18)式により β の誤差の測定精度への影響を知ることができる。

4-3 プリズムガラスの屈折率の誤差の影響

プリズムガラスは Pot Number が変わると共に、その屈折率が変わるので、そのたびに目盛尺の目盛の刻みを補正する必要がある。しかし、ガラス屈折率の誤差の測定精度への影響を知っておいて、屈折率が許容値の範囲内にあるガラスを選択するのも一つの方法で、そのためにガラス屈折率の測定精度への影響を考えてみる。

(3)式より、 n_i は指定された値をとるものとすれば

$$\Delta x = -\frac{\tan x}{n_g} \cdot \Delta n_g \quad (19)$$

また(5)式から

$$\cos r \cdot \Delta r = \Delta n_g \sin i + n_g \cos i \cdot \Delta i \quad (20)$$

ゆえに、(9)、(11)、(12)、(19)、(20)式によって

$$\Delta y = f \cdot \frac{\sin i - \tan x \cdot \cos i}{\cos^2 \theta \cdot \cos r} \cdot \Delta n_g \quad (21)$$

が得られ、(21)式によって Δy を指定すれば、 Δn_g が求まり、ガラス選択の手掛かりが得られる。

なお、ガラス生地としてはバリウムクラウン Bak₄ 程度のものが用いられる。

4-4 対物レンズ焦点距離の誤差の影響

(7)式より

$$\Delta y = \tan \theta \cdot \Delta f \quad (22)$$

であるから、測定精度が指定されれば、(22)式によって対物レンズ焦点距離の許容誤差が与えられ、これにしたがってレンズの加工精度を定めることができる。

5. 計 算 例

測定糖度範囲 0~32%，プリズムガラス Bak₄ ($n_g=1.56883$) の場合について、中心糖度を 17% に取って計算すると $x=60.026^\circ$ となり、プリズム取付角 $\beta=18.5^\circ$ と仮定すれば $\alpha=41.359^\circ$ が得られ、 $\alpha=41.5^\circ$ と定められる。対物レンズとして $f=55.008\text{mm}$ のものを用いるとして、各濃度に対する y を算出し目盛間隔をさめるとき、たとえば、糖度 16% と 17% の目盛間隔は 0.204mm となる。

この例について各要素の誤差の影響の計算例としてプリズム頂角の場合を考えてみる。 α の誤差が $\pm 1'$ のとき、糖度 17% の目盛部分については、 $i=18.526^\circ$ 、 $r=29.899^\circ$ 、 $\theta=-0.1014^\circ$ より $\Delta y = \pm 0.0115\text{mm}$ が得られる。

6. あとがき

以上、糖度計の設計計算と誤差計算の式を求めてみたが、これらによって、指定された測度精度に対する各要素の加工精度を定めることができる点に意味があると思われる。