

# 階段的な変断面をもつはり問題の解法

関 川 三 男 \*

## Solution of Beam Problems of Various Stepped Cross Sections

Mitsuo Sekikawa

The writer formerly tried to solve beam problems by the method of continuous expression of bending moment applying trigonometrical series. Now the writer applied above method to the beams and other similar constructions having various stepped cross sections establishing a general equation to solve modified diagram of bending moment by external forces and statically indeterminate forces, and tried to solve several numerical examples.

### 1. ま え が き

はり問題について筆者はさきに三角級数もちいて曲げモーメントの連続表示による一つの解法<sup>(1)</sup>を行なった。この考えをさらに発展させ階段的な変断面をもつはりや構造物に応用しはりに働く外力ならびに不静定力による修正曲げモーメント線図の三角級数による一般式をたて、一般的解法を行ない、2～3の数値例を試みた。

### 2. 一般式の誘導

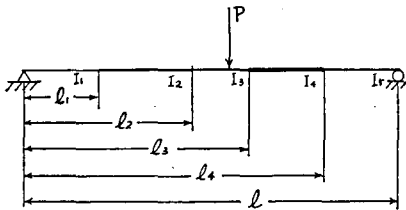


図 1

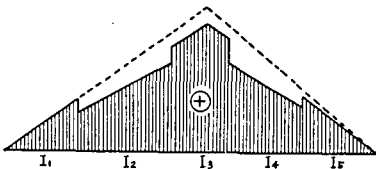


図 2

まず階段的な変断面をもつ単純支持のはりに一つの集中荷重が任意の点に作用している場合を考え、その修正曲げモーメント線図をかく。

図1は集中荷重 $P$ が作用している階段的な変断面をもつはりで図2はその修正曲げモーメント線図である。図2の修正曲げモーメント線図からその分布状態をつぎの2群にわけて考えることができる。

第1群…… $0 \leq x < l_1, l_1 \leq x < l_2, l_3 \leq x < l_4,$

$l_4 \leq x < l,$

第2群…… $l_2 \leq x < l_3,$

図3は第1群を一般的に表わしたものである。こ

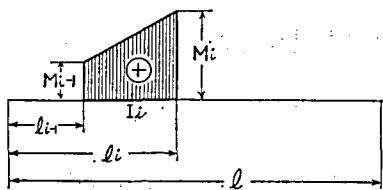


図 3

$li-1 \leq x < li$  間では  $M_x = \frac{1}{li-li-1} \{ (Mi-Mi-1)x + (Mi-1li-Mili-1) \}$  である。

したがって第1群(図3)を三角級数で表わすと、 $M = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  として

$$M = 2 \sum \left[ \frac{1}{n^2 \pi^2} \left( \frac{l}{li-li-1} \right) (Mi-Mi-1) \left( \sin \frac{n\pi li}{l} - \sin \frac{n\pi li-1}{l} \right) - \frac{1}{n\pi} \left( Mi \cos \frac{n\pi li}{l} - Mi-1 \cos \frac{n\pi li-1}{l} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (1)$$

となりこれが第1群の一般的表示の式である。

図4は第2群を一般的に表わしたものである。こゝ

で  $a$  ……荷重点までの距離

$I_1$  ……基準の断面2次モーメント

$I_k$  …… $lk-1 \leq x < lk$  間の断面2次モーメントとする。

図4より  $0 \leq x < lk-1$  間では  $M_x = 0$ ,  $lk-1 \leq x < a$  間

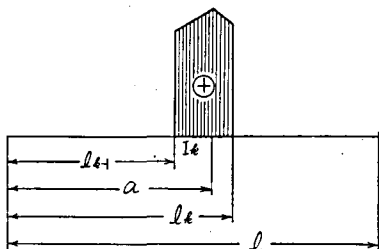


図 4

では  $M_x = P \frac{I_1}{I_k} \left( 1 - \frac{a}{l} \right) x$ ,

$a \leq x < lk$  間では  $M_x = P \frac{I_1}{I_k} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) a$ ,  $lk \leq x < l$  間では  $M_x = 0$ ,

したがって第2群(図4)を三角級数で表わすと、 $M = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  として

$$M = 2P \frac{I_1}{I_k} \sum \left[ \frac{1}{n^2 \pi^2} \left\{ l \sin \frac{n\pi a}{l} - a \sin \frac{n\pi lk}{l} - l \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \sin \frac{n\pi lk-1}{l} \right\} + \frac{1}{n\pi} \left\{ lk-1 \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \cos \frac{n\pi lk-1}{l} - a \left( 1 - \frac{lk}{l} \right) \cos \frac{n\pi lk}{l} \right\} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (2)$$

となりこれが第2群の一般的表示の式で(1), (2)式が本解法の基本式である。

図5は任意の分布荷重が作用している場合で、(2)式より  $P \rightarrow f(\xi) d\xi$ ,  $a \rightarrow \xi$  とすることにより導くことができる。

すなわち

$$M = 2 \frac{I_1}{I_k} \sum \int_{lk-1}^{lk} \left[ \frac{1}{n^2 \pi^2} \left\{ l \sin \frac{n\pi \xi}{l} - \xi \sin \frac{n\pi lk}{l} - l \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \sin \frac{n\pi lk-1}{l} \right\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{n\pi} \left\{ lk-1 \left( 1 - \frac{\xi}{l} \right) \cos \frac{n\pi lk-1}{l} - \xi \left( 1 - \frac{lk}{l} \right) \cos \frac{n\pi lk}{l} \right\} f(\xi) d\xi \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots (3)$$

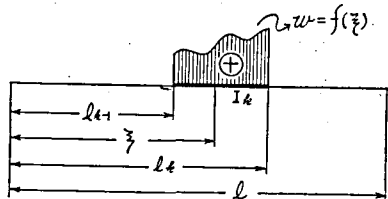


図 5

したがって等分布荷重  $q$  が作用していると

$$M = 2q \frac{I_1}{I_k} \sum \left[ \frac{l^2}{n^3 \pi^3} \left( \cos \frac{n\pi l_{k-1}}{l} - \cos \frac{n\pi l_k}{l} \right) - \frac{1}{n^2 \pi^2} \left\{ \frac{1}{2} (l_k^2 - l_{k-1}^2) \sin \frac{n\pi l_k}{l} + l \left( l_{k-1} - \frac{l_k^2}{2l} + \frac{l_{k-1}^2}{2l} \right) \sin \frac{n\pi l_{k-1}}{l} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{n\pi} \left\{ l_{k-1} \left( l_k - l_{k-1} - \frac{l_k^2}{2} + \frac{l_{k-1}^2}{2l} \right) \cos \frac{n\pi l_{k-1}}{l} - \left( 1 - \frac{l_k}{l} \right) \left( \frac{l_k^2}{2} - \frac{l_{k-1}^2}{2} \right) \cos \frac{n\pi l_k}{l} \right\} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots (4)$$

式(1)~(4)は単純支持はりについてのものであるが一般的な不静定はりにも応用され支点反力( $R$ )不静定モーメント ( $Mr$ )にも適用できる。

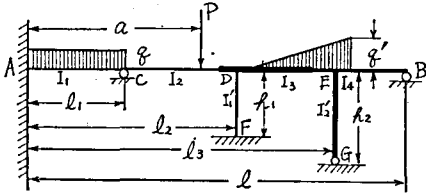


図 6

図 6 を最も一般的なはり構造の例とし解法の順序を示すと、 $AB$  間全体を一本のはりと考え

- ①…外力  $P, q, q'$  を基本式にのせて表わす。
- ②… $C, D, E$  点の未知反力  $R_1, R_2, R_3$  も集中荷重と考えて基本式にのせる。
- ③… $A, C, D, E$  点の不静定モーメント  $M_0, M_1$

$M_2, M_3$  も①, ②と同じように基本式にのせる。

- ④…①②③を重ねあわせて弾性線の式  $EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M$  に代入し未知数と同数の条件式より未知反力および不静定モーメントを決定する。

### 3. 数 値 例

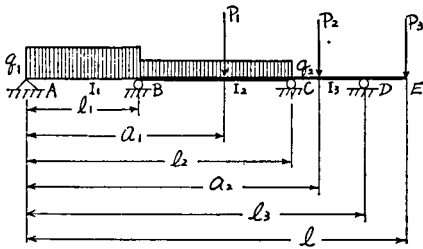


図 7

- (a) 図 7 に示すはりで未知力として  $B, C, D$  点の反力をとる。

$I_1, I_2, I_3$  をそれぞれ  $AB, BC, CE$  間の断面 2 次モーメントとする。

- (i)  $AE$  間を一本の単純支持はりと考え、まず  $q_1$  による修正曲げモーメント線図をかくと図 8 になり、 $0 \leq x < l_1$  間は (4) 式を  $l_1 \leq x < l_2$  間と  $l_2 \leq x < l$  間は (1) 式をもちいて表わし、三つの式を重ねあわせると、次の式になる。

$$M_1 = 2q_1 \sum \left[ \frac{l^2}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \cos \frac{n\pi l_1}{l} \right) + \frac{l_1^2}{2n^2 \pi^2} \left\{ \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right) \sin \frac{n\pi l_1}{l} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{I_1}{I_3} - \frac{I_1}{I_2} \right) \sin \frac{n\pi l_2}{l} \right\} + \frac{l_1^2}{2n\pi} \left\{ \left( \frac{l_1}{l} - 1 \right) \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \cos \frac{n\pi l_1}{l} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{l_2}{l} - 1 \right) \left( \frac{I_1}{I_2} - \frac{I_1}{I_3} \right) \cos \frac{n\pi l_2}{l} \right\} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots (5)$$

- (ii) 外力  $P_1, P_2, q_2$  も (i) と同様に修正曲げモーメント線図をかき一本の式にする。

- (iii) 反力  $R_0$  も  $AE$  間を一本の単純支持はりと考え、修正曲げモーメント線図をかくと図 9 になる。

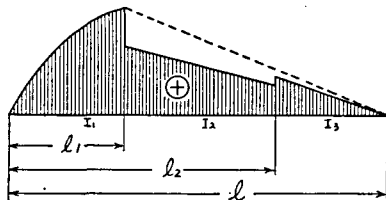


図 8

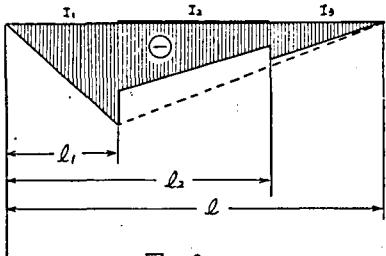


図 9

0 ≤ x < l<sub>1</sub>, l<sub>1</sub> ≤ x < l<sub>2</sub>, l<sub>2</sub> ≤ x < l, 間に(1)式を使って表わすと

$$M_2 = -2R_b \sum \left[ \frac{l}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{l_1}{n^2 \pi^2} \left\{ \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right) \sin \frac{n\pi l_1}{l} + \left( \frac{I_1}{I_3} - \frac{I_1}{I_2} \right) \sin \frac{n\pi l_2}{l} \right\} \right. \\ \left. + \frac{l_1}{n\pi} \left\{ \left( \frac{l_1}{l} - 1 \right) \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \cos \frac{n\pi l_1}{l} + \left( \frac{l_2}{l} - 1 \right) \left( \frac{I_1}{I_2} - \frac{I_1}{I_3} \right) \cos \frac{n\pi l_2}{l} \right\} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (6)$$

R<sub>c</sub>, R<sub>d</sub>も同様に表わす,

(iv) q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, R<sub>b</sub>, R<sub>c</sub>, R<sub>d</sub> について (i)~(iii) の方法で表わした式を重ねあわせて一本の式にすると, 修正曲げモーメント線図の全体が連続表示され, 次の式になる。

$$M = \sum \left[ \frac{2l^2}{n^3 \pi^3} \left\{ q_1 \left( 1 - \cos \frac{n\pi l_1}{l} \right) + q_2 \frac{I_1}{I_2} \left( \cos \frac{n\pi l_1}{l} - \cos \frac{n\pi l_2}{l} \right) \right\} + \frac{2l}{n^2 \pi^2} \left\{ P_1 \frac{I_1}{I_2} \sin \frac{n\pi a_1}{l} + P_2 \frac{I_1}{I_3} \sin \frac{n\pi a_2}{l} - R_d \frac{I_1}{I_3} \right. \right. \\ \left. \left. \sin \frac{n\pi l_3}{l} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right) \left\{ q_1 l_1^2 - q_2 (l_2 - l_1) (2l - l_2 - l_1) - 2P_1 (l - a_1) - 2P_2 (l - a_2) - 2R_b l_1 + 2R_c (l - l_2) \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2R_d (l - l_3) \right\} - 2R_b l \right] \sin \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ \left( \frac{I_1}{I_3} - \frac{I_1}{I_2} \right) \left\{ q_1 l_1^2 + q_2 (l_2^2 - l_1^2) + 2P_1 a_1 - 2P_2 (l - a_2) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2R_b l_1 - 2R_c l_2 + 2R_d (l - l_3) \right\} - 2R_c l \frac{I_1}{I_2} \right] \sin \frac{n\pi l_2}{l} + \frac{l_1}{n\pi} \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \left\{ q_1 l_1 \left( \frac{l_1}{l} - 1 \right) - \frac{q_2}{l} (l_2 - l_1) (2l - l_2 - l_1) \right. \right. \\ \left. \left. - 2P_1 \left( 1 - \frac{a_1}{l} \right) - 2P_2 \left( 1 - \frac{a_2}{l} \right) + 2R_b \left( 1 - \frac{l_1}{l} \right) + 2R_c \left( 1 - \frac{l_2}{l} \right) + 2R_d \left( 1 - \frac{l_3}{l} \right) \right\} \cos \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{1}{n\pi} \left( \frac{I_1}{I_2} - \frac{I_1}{I_3} \right) \left\{ q_1 l^2 \right. \right. \\ \left. \left. \left( \frac{l_2}{l} - 1 \right) + \left( q_2 \frac{l_2}{l} - 1 \right) (l_2^2 - l_1^2) - 2P_1 a_1 \left( 1 - \frac{l_2}{l} \right) - 2P_2 l_2 \left( 1 - \frac{a_2}{l} \right) + 2R_b l_1 \left( 1 - \frac{l_2}{l} \right) + 2R_c l_2 \left( 1 - \frac{l_2}{l} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2R_d l_2 \left( 1 - \frac{a_2}{l} \right) \right\} \cos \frac{n\pi l_2}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (7)$$

(7)式の [ ] の中を [A] で表わし弾性線の式に代入すると

$$EI_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = -[A] \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad EI_1 \frac{dy}{dx} = \frac{l}{n\pi} [A] \cos \frac{n\pi x}{l} + C_1$$

$$EI_1 y = \frac{l^2}{n^2 \pi^2} [A] \sin \frac{n\pi x}{l} + C_1 x + C_2$$

で未知数 R<sub>b</sub>, R<sub>c</sub>, R<sub>d</sub>, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> は次の条件より決定する。

$$\sum M_A = 0, \quad \left( \begin{matrix} x=0 \\ y=0, \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} x=l_1 \\ y=0, \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} x=l_2 \\ y=0, \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} x=l_3 \\ y=0, \end{matrix} \right) \quad R_d \text{ は } \sum V_i = 0 \text{ より得る。}$$

以上が解であるが, 次の数値を与えて計算する。

$$I_1 = 3I, \quad I_2 = 10I, \quad I_3 = 2I, \quad l_1 = 12', \quad l_2 = 36', \quad a_1 = 24', \quad a_2 = 40', \quad l_3 = 48', \quad l = 51',$$

$$P_1 = 20^{ki}p, \quad P_2 = 18^{ki}p, \quad q_1 = 3^{ki}p/f_1, \quad q_2 = 2^{ki}p/f_1$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum M_A = 0 \dots \dots \dots 2R_b + 6R_c + 8R_d - 479 = 0 \\ \textcircled{2} \quad x = 0, \quad y = 0 \dots \dots \dots C_2 = 0 \\ \textcircled{3} \quad x = 12', \quad y = 0 \dots \dots 118869840 - 1069272R_b - 1024200R_c - 259920R_d + 17340C_1 = 0 \\ \textcircled{4} \quad x = 36', \quad y = 0 \dots \dots 158341520 - 1024200R_b - 1848600R_c - 538640R_d + 52020C_1 = 0 \\ \textcircled{5} \quad x = 48', \quad y = 0 \dots \dots 43368192 - 259920R_b - 534960R_c - 202464R_d + 69360C_1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

(いづれも三角級数の収束値を使用して計算した)

(8)式により

$$R_a = 9.0^{ki}p \quad R_b = 62.4042^{ki}p \quad R_c = 49.1992^{ki}p \quad R_d = 7.3851^{ki}p \quad C_1 = 9.6119 \quad C_2 = 0$$

したがってせん断力線図と曲げモーメント線図は図10, 図11になる。

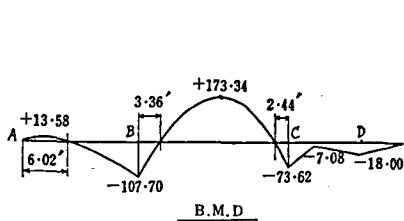


図 11

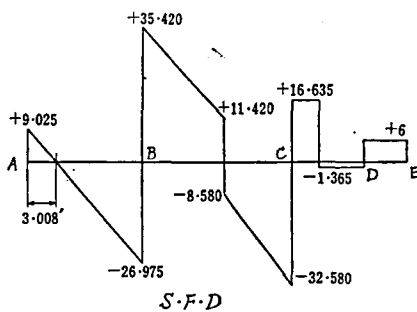


図 10

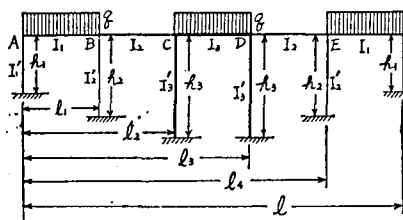


図 12

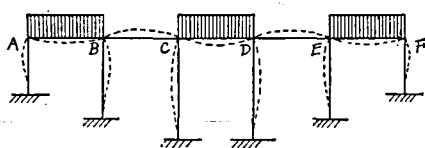


図 13

(b)

つぎの例として図12の対称形の構造物について行う。対称形であるため未知数としては、A, B, C 点の不静定モーメント,  $M_1, M_2, M_3$ とB, C点の反力  $R_b, R_c$  である。変形を図13の点線のように考え、AF間を一本のはりとし外力, 不静定力による修正曲げモーメントを式(1)~(4)を使用して一本の式で表わす。すなわち

$$M = \sum \{ 1 - (-1)^n \} \left[ \frac{2ql^2}{n^3 \pi^3} \left( 1 - \cos \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{I_1}{I_3} \cos \frac{n\pi l_2}{l} \right) + \frac{l}{n^2 \pi^2} \left\{ \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) (ql - 2ql_2 - 2R_c) - 2R_b \right\} \sin \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{l}{n^2 \pi^2} \left\{ q \left( \frac{I_1}{I_2} - \frac{I_1}{I_3} \right) (l - 2l_2) - 2R_c \frac{I_1}{I_2} \right\} \sin \frac{n\pi l_2}{l} + \frac{1}{n\pi} \left\{ \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right) (ql_1^2 + ql_1 l_2 - 2ql_1 l_2 - 2R_c l_1 - 2R_b l_1 - 2M_1) - 2M_2 \frac{I_1}{I_2} \right\} \cos \frac{n\pi l_1}{l} + \frac{1}{n\pi} \left\{ \left( \frac{I_1}{I_3} - \frac{I_1}{I_2} \right) (ql_1^2 + qll_2 - 2ql_1 l_2 - 2R_c l_2 - 2R_b l_2 - 2M_1 + 2M_2) - 2M_3 \frac{I_1}{I_3} \right\} \cos \frac{n\pi l_2}{l} - \frac{2M_1}{n\pi} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \dots \dots \dots (9)$$

たて部材については接合部 A, B, C のたわみ角を使う。

(9)式を弾性線の式に代入し(a)例と同じように行なう。

未知数は  $M_1, M_2, M_3, R_b, R_c, C_1, C_2$  の7個で、条件  $\begin{matrix} (x=0) \\ (y=0) \end{matrix}, \begin{matrix} (x=l_1) \\ (y=0) \end{matrix}, \begin{matrix} (x=l_2) \\ (y=0) \end{matrix}, \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \theta_{AA'}, \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l_1} = \theta_{BB'}, \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l_2} = \theta_{CC'}, \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = 0$ より決定する。

ここに  $\theta_{AA'}, \theta_{BB'}, \theta_{CC'}$  は A, B, C 点のたて部材のたわみ角である。

いま,  $I_1 = \frac{3}{5}I, I_2 = \frac{4}{5}I, I_3 = I, I_1' = \frac{3}{10}I, I_2' = \frac{4}{10}I, I_3' = \frac{5}{10}I, l_1 = 12^m, l_2 = 28^m, l_3 = 38^m, l_4 = 64^m, l = 76^m, h_1 = 6^m, h_2 = 8^m, h_3 = 10^m, q = 1^{\text{ton}}/m$  として数値計算を行なう。

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad & x=0, y=0 \dots \dots C_2=0 \\ \textcircled{2} \quad & x=l_1, y=0 \dots \dots 78012 - 3167R_b - 5471R_c - 288M_1 + 216M_2 - 72M_3 = 0 \\ \textcircled{3} \quad & x=l_2, y=0 \dots \dots 145685 - 5471R_b - 10335R_c - 480M_1 + 408M_2 - 168M_3 = 0 \\ \textcircled{4} \quad & \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \theta_{AA'} \dots \dots 6873 - 288R_b - 480R_c - 27M_1 + 17M_2 - 6M_3 = 0 \\ \textcircled{5} \quad & \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l_1} = \theta_{BB'} \dots \dots 5948 - 235R_b - 427R_c - 19M_1 + 10M_2 - 6M_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

$$\textcircled{6} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l_1} = \theta_{cc} \dots \dots 2308 - 72R_b - 168R_c - 6M_1 + 5M_2 - 3M_3 = 0$$

$$\textcircled{7} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l_2} = 0 \dots \dots C_1 = 0$$

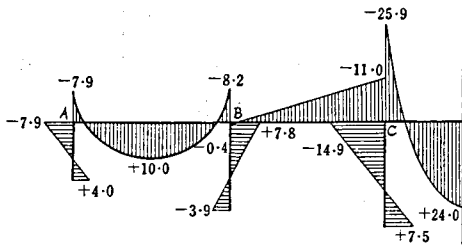


図 14

(10)式より

$$M_1 = -7.9 \text{ ton-m}, \quad R_b = 3.3 \text{ ton}$$

$$M_2 = +7.8 \text{ ton-m}, \quad R_c = 11.4 \text{ ton}$$

$$M_3 = -14.9 \text{ ton-m}, \quad C_1 = C_2 = 0$$

{ (10) 式ではモーメントの符号は反対になる。}

(b)例の曲げモーメント線図を図14に示す。

## 4. む す び

本解法は連続はり，構造物は勿論，きわめて組織的な計算法から一般的な変断面をもつ不静定構造物に広く応用できる。おわりに本研究に貴重な御示唆と適切な御指導をいただいた信州大学工学部宮入武夫教授に厚く感謝します。

## 文 献

- (1) 関川…はり問題のたわみ曲線の一元化による解法，信大工学部紀要18号
- (2) chu-kiawang著：Statically Indeterminate Structures
- (3) 大藤高彦，近藤泰夫共著：構造強弱学下巻