

自動制御系の特性設計について

中 村 喜 太 郎 *

Synthesis of Automatic Feedback Control System

Kitarō Nakamura

1. ま え が き

自動制御系の特性設計を行なう場合には、従来から周波数応答法、根軌跡法などが多く用いられているが、これらの方法は、本質的には特性解析法であって直接設計法ではない。すなわちいずれの方法も、まず補償要素の定数を適当に定めて開ループ伝達関数の形を決める。次に、この系の特性解析を行なって、得られた特性を与えられた仕様と比較する。そして、与えられた特性仕様を満足するまで補償要素の定数を修正し、同様の手順による解析を反復実施しなければならない。したがって、その設計過程は多分に試行錯誤的で、しかも、補償要素の種類を選定とその定数の仮定には、相当な経験的要素を必要とする。

これに対し、Guillemin⁽¹⁾氏の提案による特性設計法は、まず与えられた仕様を満足する閉ループ系の極と零点を決め、ついで開ループ系の伝達関数を決定し、これから与えられた固定部の伝達関数を除去して、補償要素の伝達関数が決定されるという、従来の解析的設計法とは逆の手順で行なう直接設計法である。しかし、得られた補償要素の伝達関数ができるだけ簡単な形となるためには、開ループ極のうちのいくつかを固定要素の極に一致させなければならない。そのためには、設計過程は多分に試行錯誤的になる。

ところが、高井氏が提案された代表根指定法による特性設計法は、直接設計法であるという点で、ねらいは前者と同じであるが、前者にくらべ、より直接的設計法で、設計過程において計算操作を反復実施するという試行錯誤的な点が殆んどない。すなわち具体的には、自動制御系の過渡応答の形を支配する代表根を特性仕様に指定された値に一致させるために必要な補償回路の種類、およびその定数値を直接計算または図表によって算出する方法である。

本文は、とくにゲイン定数の大きいサーボ機構に対し、代表根指定法によって特性設計を行ない、その結果をアナログ電子計算機を用いて解析したものである。

2. 自動制御系の代表根と二次系による近似

一般に、高次の自動制御系が代表振動根をもつ場合、この系の過渡応答の大勢は、この代表根

の応答分のみによって決定するので、この系は、代表根を一对の複素根とする純二次系で近似することができる。よく設計された実用的な自動制御系では、多くの場合このような近似が成り立ち、また、代表根が複素根であるのが普通である。このような系では、その誤差応答についても同様なことがいえる。

いま、ある高次の自動制御系が与えられたとして、その一对の複素数 s_0, s_0^* を、

$$s_0 = -\alpha_0 + j\omega_0, \quad s_0^* = -\alpha_0 - j\omega_0 \dots\dots\dots(1)$$

とおき、 s_0, s_0^* 以外の根を $s_1, s_2, s_3 \dots\dots s_m$ とすると、その誤差応答 $e(t)$ は次式のようになる。

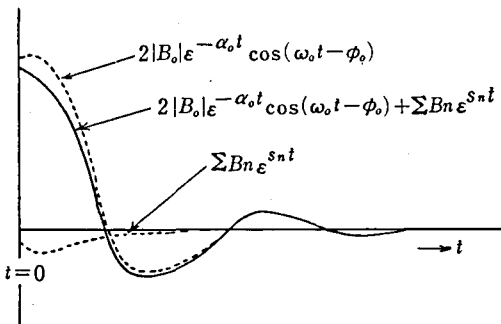
$$e(t) = 2|B_0|e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \phi_0) + \sum_{n=1}^m B_n e^{s_n t} \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 B_0 は s_0, s_0^* の留数、 $\phi_0 = -\angle B_0$ 、 B_n は s_0, s_0^* 以外の根の留数である。

さて、一对の複素根が代表根であって、この系を純二次系で近似できる場合は、(2)式の第2項は第1項にくらべ極めて小さいので、次の近似式が成り立つ。

$$e(t) \approx 2|B_0|e^{-\alpha_0 t} \cos(\omega_0 t - \phi_0) \dots\dots\dots(3)$$

このように、代表根を有し純二次系による近似が可能な高次の自動制御系の誤差応答の形は、およそ図1のようになる。



高次の自動制御系の誤差応答

図 1

以上のような二次系による近似の考え方を基礎にして、自動制御系の一对の複素根が代表根となるための条件を求めてみる。

一般に、多くの自動制御系の誤差応答に関する性質として、次の二つの式が成り立つ。

$$|e(t)|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Delta e(t) = 1 \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \frac{d}{dt} e(t) \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s [s \Delta e(t) - e(0)] = 0 \dots\dots\dots(5)$$

ここで、一对の複素根がその系の代表根である場合は、上式は(3)式の $e(t)$ に対しても成立しなければならないので、

$$(4) \text{式より、} |B_0| \cos \phi_0 \approx \frac{1}{2} \dots\dots\dots(6)$$

$$(5) \text{式より、} \phi_0 \approx \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) \approx \tan^{-1} \gamma_0 \dots\dots\dots(7)$$

なる条件式が得られる。さらに、制御特性の良否の程度を実用的に表わす値としての2乗誤差面積を最小にするための条件式、すなわち、

$$\frac{d}{d\phi_0} \left[\int_0^{\infty} \{e(t)\}^2 dt \right] = 0 \dots\dots\dots(8)$$

に(3)式の $e(t)$ を代入すると、

$$\phi_0 = -\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_0}{\omega_0} \right) = -\tan^{-1} \gamma_0 \dots\dots\dots(9)$$

なる関係が得られる。

したがって、ある自動制御系が二次系で近似でき、しかも2乗誤差面積がそう大きくないための条件として、一応、次の条件式が考えられる。

$$\left. \begin{aligned} -\tan^{-1}\gamma_0 < \tan^{-1}\gamma_0 \\ |B_0| \cos\phi_0 \approx \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

しかし、応答の形もそう悪くならない実用上さしつかえない程度の裕度を与えた $|B_0| \cos\phi_0$ および ϕ_0 の範囲は、多くの設計上の経験から、

$$\frac{1}{3} < |B_0| \cos\phi_0 < \frac{3}{4} \dots\dots\dots (11)$$

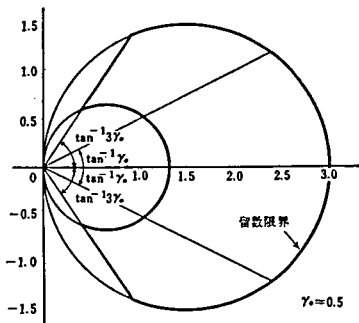
$$-\tan^{-1}3\gamma_0 < \phi_0 < \tan^{-1}3\gamma_0 \dots\dots\dots (12)$$

でよいとされている。したがって、ある制御系の一对の複素根の留数ベクトル $B_0 = |B_0|e^{j\phi_0}$ が

(11)式の領域内にあれば、その複素根は代表根であるといえる。しかし、実際の特性設計の結果、代表根であるかどうかを確認する際は、実際の計算が簡単である留数ベクトルの逆数の領域を用いている。この場合の範囲は、

$$\frac{4}{3} < \frac{1}{|B_0|} \sec\phi_0 < 3 \dots\dots\dots (13)$$

となる。(12)式と(13)式が与える範囲を図示すると、図2のようなになる。これを代表根の留数限界図という。



代表根の留数限界図

図 2

3. 代表根留数の計算方法

誤差応答における一对の複素根 s_0, s_0^* の留数ベクトル B_0 および、その逆数 $1/B_0$ は、他の特性根が未知の場合でも、与えられた系の一巡伝達関数の零点と極の値から、次のようにして求めることができる。いま、ある系のインパルス応答の s 表示 $F(s)$ が、

$$F(s) = \frac{s^m + b_1s^{m-1} + b_2s^{m-2} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) \dots (s-s_n)} = \frac{N(s)}{D(s)} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられた場合、 $s=s_k$ なる極に対する留数 B_k は、ヘビサイドの展開定理から、

$$B_k = \left. \frac{N(s)}{dD(s)} \right|_{s=s_k} \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。したがって、図3のような一巡伝達関数 $F(s)$ をもった高次の自動制御系の誤差応答における特性根 s_0 の留数ベクトル B_0 は、

$$B_0 = \left. \frac{1}{\frac{d}{ds} [1 + F(s)]} \right|_{s=s_0} \dots\dots\dots (16)$$

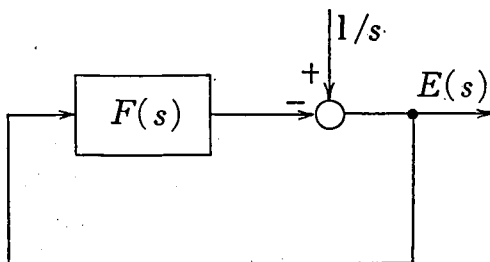


図 3

として求めるから、その逆数ベクトル $A_0=1/B_0$ は、

$$|A_0|_{\varepsilon^{j\theta_0}} = \left[\frac{d}{ds} s \{1+F(s)\} \right]_{s=s_0} = -s_0 \left[\frac{d}{ds} \log F(s) \right]_{s=s_0} \dots\dots\dots (17)$$

(ただし、 $1+F(s_0)=0$ である。)

となる。ここで、系の一巡伝達関数 $F(s)$ が、

$$F(s) = \frac{K(1+sT_{z1})(1+sT_{z2})(1+sT_{z3})\dots\dots(1+sT_{zm})}{s^n(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})(1+sT_{p3})\dots\dots(1+sT_{pl})} \dots\dots\dots (18)$$

(ただし、 $m < l$)

なる形で与えられたとすれば、これを(17)式に代入して整理すると、 A_0 は次式のようになる。

$$|A_0|_{\varepsilon^{j\theta_0}} = -s_0 \left(\frac{d}{ds} \log \frac{K \prod_{k=1}^m (1+sT_{zk})}{s^n \prod_{k=1}^l (1+sT_{pk})} \right)_{s=s_0}$$

$$= n+l-m + \sum_{k=1}^m \frac{1}{1+s_0 T_{zk}} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{1+s_0 T_{pk}} \dots\dots\dots (19)$$

したがって、実際の設計の際は、留数の逆数ベクトル A_0 を(19)式の計算式で求め、これを図2の上にプロットすることによって、その根が代表根であるかどうかを容易に知ることができる。

4. 代表根指定法の原理

高井氏が提案された自動制御系の代表根指定法の原理について述べる。自動制御系の過渡特性の設計に際して、この系に所要の過渡応答を持たせようとするれば、その系にそれに相当した代表根を持たせればよい。また、系に要求される一巡増幅度は、設計仕様に指定された定常特性から簡単に決まる。一般に、定常特性をよくするために一巡増幅度を大きくすると、系の過渡特性は悪くなるのが普通である。このような場合に、系の過渡特性の改善を行なうため、これに補償回路をそう入する方法がとられている。ここでいう代表根指定法とは、このような定常特性はよいが、過渡特性がよくない系に、指定した代表根を持たせ、特性改善を行なうための補償回路の選定と、その定数設計の具体的方法である。

さて、一对の複素根の一つ s_0 は、固有角周波数 ω_0 [rad/s] と減衰率を用いて、一般に、

$$s_0 = (-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n \dots\dots\dots (20)$$

与えられるが、過渡特性設計の際の特性仕様として指定される代表根は、(20)式を変形して次式のような形にする。

$$s_0 = (-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} + j)\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = (-\gamma_0 + j)\omega_0 \dots\dots\dots (21)$$

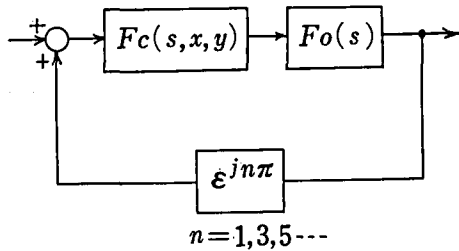
ここで、 $\gamma_0 = \zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ は、過渡応答の形を指定する定数で、これを渡衰度という。

$\omega_0 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ は 応答の速さを指定する定数で、これを減衰角周波数という。

この減衰度 γ_0 は自動制御系の種類に応じて最適の値が存在し、サーボ機構では $\gamma_0 \approx 0.45$ が適当であるとされている。また、減衰度 γ_0 が一定であれば、減衰角周波数 ω_0 は大きいほど望ましいことはいうまでもない。

次に、閉ループ系に指定根 $s_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0$ を持たせるような、調整可能な二つの自由度 x ,

y (実数) を持った直列補償要素 $F_c(s, x, y)$ の求め方について述べる。



$n=1,3,5\dots$

4 図

図4のようなブロック線図の閉ループ系の特性方程式は、次式ようになる。

$$e^{jn\pi} \cdot F_c(s, x, y) \cdot F_o(s) = 1 \dots\dots\dots(22)$$

ただし、 $F_o(s)$: 補償前の系の伝達関数

この系に指定根 s_0 を持たせるためには、 s の値として s_0 をあてはめた場合にも、(22)式が成立しなければならない。すなわち、

$$e^{jn\pi} \cdot F_c(s_0, x, y) \cdot F_o(s_0) = 1 \dots\dots\dots(23)$$

ゆえに

$$F_c(s_0, x, y) = e^{-jn\pi} / F_o(s_0) \dots\dots\dots(24)$$

ここで、自動御系では、一般に

$$e^{jn\pi} = -1, (n=1, 3, 5\dots) \dots\dots\dots(25)$$

で表わされる。(22)式で $e^{jn\pi}$ を -1 の代わりに用いたのは、位相条件によって特性根を区別する必要があるからである。いうまでなく、位相条件が π の特性根に比べ、 $3\pi, 5\pi$ のように、それより大きい位相条件の特性根は、根平面上ではこの根の左側にあり、減衰が非常に大きいので、過渡応答全体に対する影響は、はるかに小さいのが普通である。したがって、指定根が代表根であるためには(25)式で、

$$n=1 \dots\dots\dots(26)$$

の条件が必要である。つまり代表根は、位相条件が π 、すなわち $n=1$ のときの特性根の中に含まれているとみてよい。以下、代表根について取り扱っていくのであるから、 $n=1$ とする。さて、(24)式の右辺は既知の複素数であるから、これをベクトルで表示して、

$$\frac{e^{-j\pi}}{F_o(s_0)} \equiv |G_c| e^{j\phi_c} \dots\dots\dots(27)$$

とおく。(27)式の右辺のベクトル量を、指定根 s_0 に対するその系の補償ベクトルという。そうすると、(24)式と(27)式から次のような関係式が得られる。

$$F_c(s_0, x, y) = |G_c| e^{j\phi_c} \dots\dots\dots(28)$$

この式は複素方程式であるから、次の二つの実数方程式に分けることができる。

$$\left. \begin{aligned} Re \{ F_c(s_0, x, y) \} &= |G_c| \cos \phi_c \\ Im \{ F_c(s_0, x, y) \} &= |G_c| \sin \phi_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

ただし、 Re は実部を、 Im は虚部を示す。

上式は、 x, y についての二元連立方程式であるから、これを解くことによって、補償回路の二つの自由度 x, y の値を決定することができ、その系に指定根 $s_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0$ をもたせることができる。それと同時に、その系は指定根と共役な根 $s_0^* = (-\gamma_0 - j)\omega_0$ をもつようになることはいうまでもない。この場合、指定根が代表根になることが多いが、必ずしも代表根であるとは限らないので、その系の代表根になっているかを確認する必要がある。これについては、(19)式の留数計算によって、代表根の条件を満たしているかどうかを検討すればよい。

5. 補償回路の設計

ここでは、実際に過渡特性設計の仕様として、指定根 $s_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0$ が与えられた場合について、具体的な補償回路の設計方法について述べる。

(1) 位相進み回路

この補償回路の伝達関数 $F_c(s)$ は、次式のとおりである。

$$F_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_s}}{1 + \frac{s}{n\omega_s}} \dots\dots\dots (30)$$

(ただし、 $n > 1$, $\omega_s > 0$ とする)

さて、この系の指定根 s_0 に対する補償ベクトルを計算した結果、次のように求められたとする。

$$|G_c|e^{j\phi_c} = |G_c|(\cos\phi_c + j\sin\phi_c) \dots\dots\dots (31)$$

したがって、(30)式における s を s_0 とおいて、次式が成立しなければならない。

$$\frac{1 + \frac{s_0}{\omega_s}}{1 + \frac{s_0}{n\omega_s}} = |G_c|(\cos\phi_c + j\sin\phi_c) \dots\dots\dots (32)$$

次に、(32)式の左辺に $s_0 = (-\gamma_0 + j)\omega_0$ を代入して、その実数部および虚数部から二つの実数方程式をつくる。これを解いて補償回路の自由度の値 ω_s と n を求めれば、次式のようになる。

$$\omega_s = \frac{\omega_0(1 + \gamma_0^2)\sin\phi_c}{|G_c| - \cos\phi_c + \gamma_0\sin\phi_c} \dots\dots\dots (33)$$

$$n = \frac{|G_c| - \cos\phi_c + \gamma_0\sin\phi_c}{\cos\phi_c + \gamma_0\sin\phi_c - 1/|G_c|} \dots\dots\dots (34)$$

以上のようにして得られた(33)式および(34)式を、位相進み回路の補償公式という。この補償公式を用いれば、系に指定根をもつような進み補償回路の定数 ω_s および n を計算によって求めることができるわけであるが、実際の設計の際は、この定数 ω_s および n を図上で直読できるようにしておいた方がよい。そこで ω_s の代わりに、相対折点角周波数 $\Omega_s = \omega_s/\omega_0$ を用いて、(33)式を次のように変形する。

$$\log|G_c| - \log\sqrt{\left(\frac{1 + \gamma_0^2}{\Omega_s^2} - \gamma_0^2\right)^2 + 1} = \log\left[\cos\left\{\phi_c - \tan^{-1}\left(\frac{1 + \gamma_0^2}{\Omega_s^2} - \gamma_0^2\right)\right\}\right] \dots\dots\dots (35)$$

この式は、対数ベクトル平面($G_c = \log|G_c| + j\phi_c$)上では、 $\log|G_c| - \log\phi_c = 0$ で示される曲線に、次式で示されるベクトル値 P をベクトル的に加えたものである。

$$P = \log\sqrt{\left(\frac{1 + \gamma_0^2}{\Omega_s^2} - \gamma_0^2\right)^2 + 1} + j\tan^{-1}\left(\frac{1 + \gamma_0^2}{\Omega_s^2} - \gamma_0^2\right) \dots\dots\dots (36)$$

このベクトル値 P は、 γ_0 を一定値とすれば Ω_s の値によって変化するので、対数ベクトル平面上での(35)式を与える G_c のベクトル軌跡は、 Ω_s をパラメータとする多数の曲線群となる。

図5は Ω_s をパラメータとしたときの、 $|G_c| \sim \phi_c$ 線図の求め方を示したもので、この線図は、実際の設計においては Ω_s の目盛線となる。

また、 n の目盛線は次のようにして求められる。まず、(34)式を変形すると、 ϕ_c は次式のようになる。

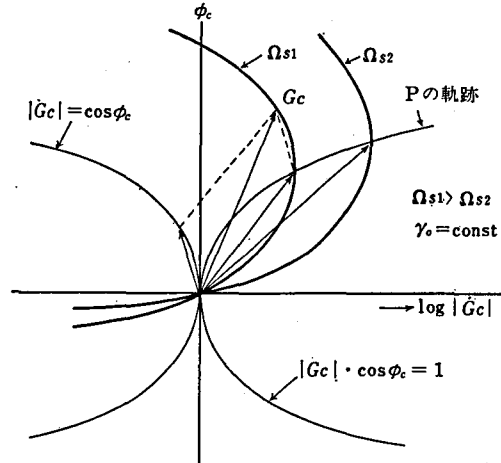


図 5 Ω_s の目盛線の求め方

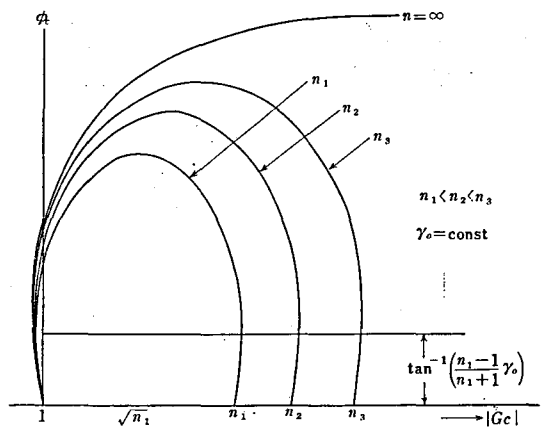
$$\phi_c = \tan^{-1} \left(\frac{n-1}{n+1} \gamma_0 \right) \pm \cos^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{n}{(n+1)^2 + (n-1)^2 \gamma_0^2} \left(\frac{|G_c|}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{|G_c|} \right)} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

設計の際は 減衰度 γ_0 は特性仕様として与えられているから、これは定数である。 n にある一定値を与えたとき、対数ベクトル平面上における(37)式の関係为满足する $|G_c| \sim \phi_c$ 軌跡は、 n をパラメータとする多数の曲線群となる。この曲線、すなわち n の目盛線の概形は、

(i) $\phi_c = \tan^{-1} \{ (n-1) \gamma_0 / (n+1) \}$ を示す水平線を軸として対称形になる。

(ii) (37)式で、 $|G_c| / \sqrt{n}$ の代わりに $\sqrt{n} / |G_c|$ を入れても、同一の ϕ_c を得るので、対数平面上では $|G_c| = \sqrt{n}$ を示す垂直線を軸として対称形である。

また (34)式で、 $\phi_c = 0$ とおけば、 $|G_c| = \{ (1+n) \pm (1-n) \} / 2$ より、 $|G_c| = 1$ 、および $|G_c| = n$ を得るので、この目盛線は $\log |G_c|$ 線上の 1 および n を通る曲線となる。図6は以上のことを総合して描いた n の目盛線の概形を示したものである。



n の目盛線

図 6

進み回路における Ω_s の目盛線と n の目盛線を一つの対数平面上に描いたものを、進み回路の対数補償計算線図という。実際の設計の際は、求められた補償ベクトルをこの対数補償計算線図の上にプロットし、そのベクトルの先端を通る Ω_s と n の目盛線の値を読み、この値から進み回路の定数 ω_s および n の値を決定することができる。

(2) 位相遅れ回路

この補償回路の伝達関数 $F_c(s)$ は、次式のとおりである。

$$F_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_s}}{1 + \frac{ns}{\omega_s}} \dots\dots\dots (38)$$

(ただし, $n > 1, \omega_s > 0$ とする。)

この伝達関数の逆数を $F_c'(s)$ とすると, $F_c'(s)$ は次のようになる。

$$F_c'(s) = \frac{1}{F_c(s)} = \frac{1 + \frac{ns}{\omega_s}}{1 + \frac{s}{\omega_s}} \dots\dots\dots (39)$$

ここで, $\omega_s/n = \omega_s'$ すなわち $\omega_s = n\omega_s'$ とおけば,

$$F_c'(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_s'}}{1 + \frac{s}{n\omega_s'}} \dots\dots\dots (40)$$

となり, これは(30)式とまったく同形である。このことは, 同一の n に対する進み回路の目盛線と遅れ回路の目盛線とは, 対数平面上では原点を中心にして互いに対称形となることを意味する。したがって, $F_c(s)$ の逆数ベクトル $F_c'(s)$ に対しては, 進み回路の補償計算線図をそのまま使用することができる。すなわち, 遅れ回路で補償する場合は, 対数ベクトル平面上に補償ベクトルの逆ベクトルを描き, 進み回路の補償計算線図から n および相対折点角周波数 $\Omega_s' = \omega_s'/\omega_0$ を読み取れば, 遅れ回路の定数 ω_s は,

$$\omega_s = n\omega_s' = n\omega_0\Omega_s' \dots\dots\dots (41)$$

として求めることができる。以上のことは, 次の位相進み遅れ回路の設計に用いられる。

(3) 位相進み遅れ回路

この補償回路の伝達関数 $F_c(s)$ は, 次式のとおりである。

$$F_c(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{s1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{s2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{n\omega_{s1}}\right) \left(1 + \frac{ns}{\omega_{s2}}\right)} \dots\dots\dots (42)$$

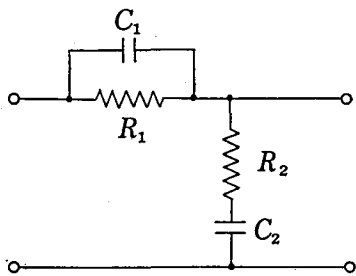


図 7

また, 図7の実際の回路の各定数と ω_{s1}, ω_{s2} および n との関係は, 次式のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{s1} &= \frac{1}{C_1 R_1}, \quad \omega_{s2} = \frac{1}{C_2 R_2} \\ (n-1) \left(\frac{1}{\omega_{s2}} - \frac{1}{n\omega_{s1}} \right) &= R_1 C_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

ただし, R_1, R_2, C_1, C_2 がいずれも正の値であるためには, $\omega_{s1} > 0, \omega_{s2} > 0$ で, $n = 1$ のとき,

$n\omega_{s1} > \omega_{s2}$ でなければならない。

この補償回路の伝達関数の設計は, 与えられた補償ベクトル $|G_c|e^{j\phi_c}$ を, 相乗積が $|G_c|e^{j\phi_c}$ になるような進み回路の補償ベクトル $|G_{c1}|e^{j\phi_{c1}}$ と遅れ回路の補償ベクトル $|G_{c2}|e^{j\phi_{c2}}$ とに分解する具体的方法ということになる。さて, (42)式において,

$$\frac{1 + \frac{s}{\omega_{s1}}}{1 + \frac{s}{n\omega_{s1}}} \equiv F_{c1}(s), \quad \frac{1 + \frac{s}{\omega_{s2}}}{1 + \frac{ns}{\omega_{s2}}} \equiv F_{c2}(s) \dots\dots\dots (44)$$

とおき、 $F_{c1}(s)$ 、 $F_{c2}(s)$ および $F_c(s)$ の対数補償ベクトルを、それぞれ Z_{c1} 、 Z_{c2} および Z_c とすれば、

$$\left. \begin{aligned} Z_{c1} &= K_1 \log|G_{c1}| + jK_2 \phi_{c1} \\ Z_{c2} &= K_1 \log|G_{c2}| + jK_2 \phi_{c2} \\ Z_c &= K_1 \log|G_c| + jK_2 \phi_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

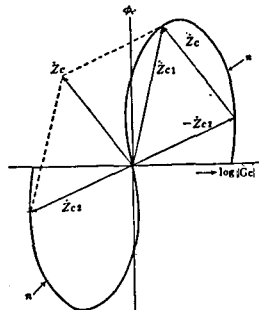
(ただし、 K_1 、 K_2 : 目盛係数)

なる式で示されるので、 $Z_c = Z_{c1} + Z_{c2}$ なる関係が成り立つ。したがって、対数複素平面上では、ベクトルの合成・分解が容易に行なえる。この関係を用いて、実際の設計の際は、進み遅れ回路の補償しようとする補償ベクトル Z_c を、次のようにして進み回路の補償ベクトル Z_{c1} と遅れ回路の補償ベクトル Z_{c2} とに分けることができる。

すなわち、遅れ回路で補償すべきベクトル Z_{c2} の逆ベクトルの先端は、進み回路の同一の n の目盛線上にあるから、対数複素平面上に与えられた補償ベクトル Z_c が描かれている場合、図8に示すように、これを平行移動して、進み回路の補償限界内のある n の値の目盛線の弦になるようにできれば、補償ベクトル Z_c は、進み回路の補償ベクトル Z_{c1} と遅れ回路の補償ベクトル Z_{c2} とに分解できたことになる。

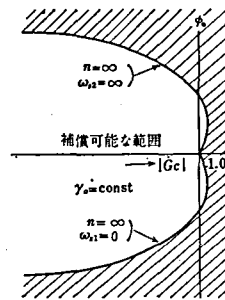
したがって、 Z_c の両端の相対折点周波数 Ω_s および n の目盛から、各自由度の値を求めることができる。位相進み遅れ回路による補償の場合も、進み回路の補償計算線図のみを用意しておけば、設計が可能ということになる。

ここで、進み遅れ回路による補償可能な補償ベクトルの範囲を示すと、図9のようになる。



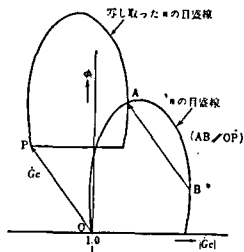
図式設計法の原理

図 8



補償限界図

図 9



図式設計手順

図 10

次に、 n の値を適当に選定したとして、他の二つの定数 ω_{s1} および ω_{s2} を求める実際の方法を図示すれば、図10のようになる。同図に示す方法によって得られたA点およびB点の相対折点角周波数が、それぞれ Ω_{s1} および Ω_{s2} であったとすれば、 n 以外の二つの自由度の値は、次の式から決定する。

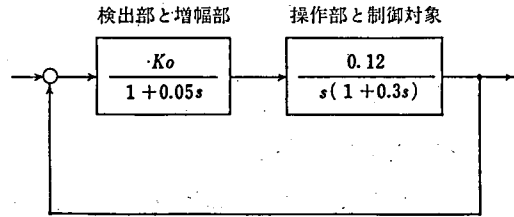
$$\omega_{s1} = \omega_0 \Omega_{s1}, \quad \omega_{s2} = n \omega_0 \Omega_{s2} \dots\dots\dots (46)$$

6. 特性設計の例

図11のようなサーボ機構が与えられたとする。

指定された特性仕様は、次のとおりとする。

- (i) 定常特性：定常速度偏差 $\epsilon_v < 0.3\%$
- (ii) 速応性：減衰角周波数 $\omega_0 > 10 \text{ rad/s}$
- (iii) 安定度：減衰度 $\gamma_0 = 0.5$



設計すべきサーボ機構のブロックダイヤグラム

6-1 定常特性設計

(1) 増幅器の増幅度 K_0 の決定

図 11

指定された定常特性仕様を満足する系の一巡増幅度 K は、次のようになる。

$$K = \frac{1}{\epsilon_v} = 350 \dots\dots\dots (47)$$

したがって、増幅器に要求されるゲイン K_0 は、

$$K_0 = \frac{K}{0.12} \approx 2917 \dots\dots\dots (48)$$

となり、 $20 \log K_0 \approx 69.3 [\text{dB}]$ となる。

6-2 過渡特性設計

(1) 指定減衰度 $\gamma_0 = 0.5$ であるから、指定根 s_0 は次式のように表わされる。

$$s_0 = (-0.5 + j)\omega_0 \dots\dots\dots (49)$$

(2) 補償方式は、電子管増幅器を使用するとして、直列補償を採用する。

(3) 補償ベクトル軌跡の計算

定常特性設計の結果、この系に要求される一巡増幅度は、 $K = 350$ と決まったので、補償前の系の一巡伝達関数 $F(s)$ は、図11より次式のようになる。

$$F(s) = \frac{350}{s(1+0.3s)(1+0.05s)} \dots\dots\dots (50)$$

したがって、補償ベクトル $|G_c|e^{j\phi_c}$ は、(50)式に上式の $F(s)$ を代入すると、次式のようになる。

$$|G_c|e^{j\phi_c} = \frac{\epsilon^{-j\pi}}{F(s_0)} = \frac{\epsilon^{-j\pi}}{350} s_0(1+0.3s_0)(1+0.05s_0) \dots\dots\dots (51)$$

ここで、指定根 $s_0 = (-0.5 + j)\omega_0$ であるから、これを上式に代入すると、

$$\begin{aligned} |G_c|e^{j\phi_c} &= \frac{\epsilon^{-j\pi}}{350} (-0.5 + j)\omega_0 [1 + 0.3(-0.5 + j)\omega_0] [1 + 0.05(-0.5 + j)\omega_0] \\ &= |G_0|e^{j\phi_0} \cdot |G_1|e^{j\phi_1} \cdot |G_2|e^{j\phi_2} \cdot |G_3|e^{j\phi_3} \\ &= |G_0| \cdot |G_1| \cdot |G_2| \cdot |G_3| \cdot \exp j(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

となり、上式の各項の計算式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 |G_0|/\phi_0 &= \frac{\epsilon^{-j\pi}}{350} = \frac{10^{-2}}{3.5} \angle -180^\circ \\
 |G_1|/\phi_1 &= (-0.5+j)\omega_0 = \sqrt{0.5^2+1^2}\omega_0 \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{-0.5}\right) = 1.12\omega_0/116.8^\circ \\
 |G_2|/\phi_2 &= 1+0.3(-0.5+j)\omega_0 = \sqrt{(1-0.15\omega_0)^2+(0.3\omega_0)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{0.3\omega_0}{1-0.15\omega_0}\right) \\
 |G_3|/\phi_3 &= 1+0.05(-0.5+j)\omega_0 = \sqrt{(1-0.025\omega_0)^2+(0.05\omega_0)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{0.05\omega_0}{1-0.125\omega_0}\right)
 \end{aligned} \tag{53}$$

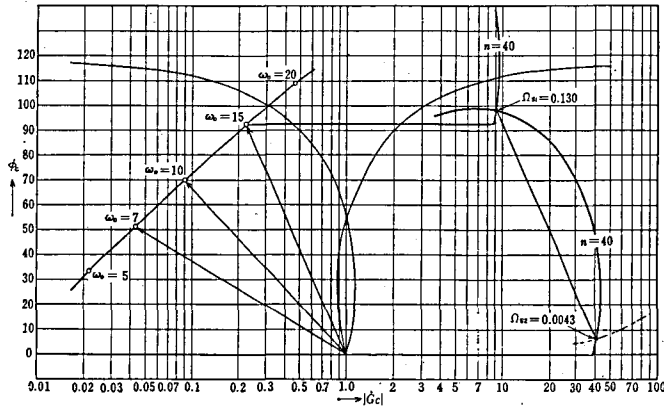
ここで、計算すべき ω_0 の範囲は、与えられた一巡伝達関数の各折点角周波数のうちで、小さい方から数えて2番目の折点角周波数からその10倍程度まででよい。減衰角周波数の指定値 $\omega_0=3, 5, 7, 10, 15, 20$ rad/s のときの、それぞれの補償ベクトルを計算する計算表、ならびにその計算結果を示せば、表1のとおりである。

表 1 各 ω_0 に対する補償ベクトルの計算表

ω_0 [rad/s]	$ G_0 /\phi_0$	$ G_1 /\phi_1$	$ G_2 /\phi_2$	$ G_3 /\phi_3$	$ G_c /\phi_c$
3	$2.86 \times 10^{-3}/180^\circ$	$3.36/116.8^\circ$	$1.05/58.5^\circ$	$0.937/9.2^\circ$	$0.010/4.5^\circ$
5	"	$5.60/ "$	$1.52/80.5^\circ$	$0.910/15.9^\circ$	$0.021/33.2^\circ$
7	"	$7.84/ "$	$2.10/91.4^\circ$	$0.897/23.0^\circ$	$0.042/51.2^\circ$
10	"	$11.2/ "$	$3.04/99.5^\circ$	$0.900/33.7^\circ$	$0.088/70.0^\circ$
15	"	$16.8/ "$	$4.67/105.5^\circ$	$0.975/50.2^\circ$	$0.219/92.5^\circ$
20	"	$22.4/ "$	$6.33/108.4^\circ$	$1.120/63.5^\circ$	$0.454/108.7^\circ$

(4) 補償回路の選定

表1の結果を片対数方眼紙上にプロットし、補償ベクトル軌跡を描くと、図12の曲線が得られる。同図から明らかなように、 $3 < \omega_0 < 17$ rad/s の範囲では、補償ベクトルは、いわゆる進み遅れ回路の補償限界内にあることがわかる。なお、進み回路の補償限界内にも入っているが、この回路のゲイン定数は1より小さくなるので、これを使用すると定常特性を悪化させることになり、ここでは使用できない。したがって、補償回路としては進み遅れ回路を選定する。



補償計算線図による図式設計方法

(5) 補償回路の伝達関数の算定

別に用意されている進み回路の補償計算線図 ($\gamma_0=0.5$) を使用する。図12に示してあるように、減衰角周波数 $\omega_0=7, 10, 15$ rad/s のときの補償ベクトルに対する進み遅れ回路の n および相対折点角周波数 Ω_{s1}, Ω_{s2} を、図10の方法によって読み取る。そして、次のようにして、この補償回路の三つの自由度 n および ω_{s1}, ω_{s2} の値を決定することができる。

$$\omega_0=7 \text{ rad/s}$$

$n=40$ を選定すると、 $\Omega_{s1}=0.575, \Omega_{s2}=0.0163$ を得る。

$$\omega_{s1}=\omega_0\Omega_{s1}=4.025, \quad 1/\omega_{s1}=0.248, \quad 1/n\omega_{s1}=0.0062$$

$$\omega_{s2}=n\omega_0\Omega_{s2}=4.57, \quad 1/\omega_{s2}=0.219, \quad n/\omega_{s2}=8.76$$

$$\omega_0=10 \text{ rad/s}$$

$n=40$ を選定すると、 $\Omega_{s1}=0.285, \Omega_{s2}=0.0135$ を得る。

$$\omega_{s1}=\omega_0\Omega_{s1}=2.85, \quad 1/\omega_{s1}=0.351, \quad 1/n\omega_{s1}=0.0088$$

$$\omega_{s2}=n\omega_0\Omega_{s2}=5.40, \quad 1/\omega_{s2}=0.185, \quad n/\omega_{s2}=7.410$$

$$\omega_0=15 \text{ rad/s}$$

$n=40$ を選定すると、 $\Omega_{s1}=0.130, \Omega_{s2}=0.0043$ を得る。

$$\omega_{s1}=\omega_0\Omega_{s1}=1.95, \quad 1/\omega_{s1}=0.513, \quad 1/n\omega_{s1}=0.0128$$

$$\omega_{s2}=n\omega_0\Omega_{s2}=2.58, \quad 1/\omega_{s2}=0.388, \quad n/\omega_{s2}=15.50$$

以上の図式計算結果を用いて、各 ω_0 に対する補償伝達関数を示すと、表2のようになる。

表2 各 ω_0 に対する補償伝達関数

ω_0 [rad/s]	n	ω_{s1} [rad/s]	ω_{s2} [rad/s]	$F_{c1}(s) \cdot F_{c2}(s)$
7	40	4.025	4.57	$\frac{(1+0.2480s)}{(1+0.0062s)} \cdot \frac{(1+0.219s)}{(1+8.760s)}$
10	40	2.850	5.40	$\frac{(1+0.3510s)}{(1+0.0088s)} \cdot \frac{(1+0.185s)}{(1+7.410s)}$
15	40	1.950	2.58	$\frac{(1+0.5130s)}{(1+0.0128s)} \cdot \frac{(1+0.388s)}{(1+15.50s)}$

(6) 留数の逆数の計算

以上のようにして得られた補償伝達関数を、補償前の伝達関数に直列にそう入したとき、この系の一巡伝達関数は次のようになる。

$$F(s) = \frac{(1+s/\omega_{s1})}{(1+s/n\omega_{s1})} \cdot \frac{(1+s/\omega_{s2})}{(1+ns/\omega_{s2})} \cdot \frac{350}{s(1+0.3s)(1+0.05s)} \dots\dots\dots (64)$$

したがって、代表根であるかどうかを検討すべき根 s_0 の留数の逆数 A_0 は、上式の $F(s)$ を(19)式に代入することによって、次式のようになる。

$$A_0(j\omega) = 3 + \left[\frac{1}{1+s_0/\omega_{s1}} + \frac{1}{1+s_0/\omega_{s2}} \right] - \left[\frac{1}{1+s_0/n\omega_{s1}} + \frac{1}{1+ns_0/\omega_{s2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{1+0.3s_0} + \frac{1}{1+0.05s_0} \right] \dots\dots\dots (55)$$

さて、上式において、

$$\frac{1}{1+s_0/\omega_{s1}} \equiv A_{z1}, \quad \frac{1}{1+s_0/\omega_{s2}} \equiv A_{z2}$$

$$\frac{1}{1+s_0/n\omega_{s1}} \equiv A_{p1}, \quad \frac{1}{1+nS_0/\omega_{s2}} \equiv A_{p2}$$

$$\frac{1}{1+0.3s_0} \equiv A_{p3}, \quad \frac{1}{1+0.05s_0} \equiv A_{p4}$$

とおき、 $\omega_0=7, 10, 15$ rad/s に対する A_0 の計算結果をまとめると、次の表3のようになる。ただし、この計算の際に用いた $n, \omega_{s1}, \omega_{s2}$ は、表2に示した値である。

表3 式(5)の計算表

ω_0 [rad/s]	A_{z1}	A_{z2}	A_{p1}	A_{p2}	A_{p3}	A_{p4}	A_0
7	0.037 $-j0.563$	0.099 $-j0.648$	1.025 $-j0.045$	-0.006 $-j0.013$	-0.012 $-j0.475$	1.027 $-j0.436$	1.102 $-j0.241$
10	-0.059 $-j0.273$	0.023 $-j0.540$	1.038 $-j0.096$	-0.043 $-j0.119$	-0.054 $-j0.324$	0.923 $-j0.617$	1.100 $j0.343$
15	-0.043 $-j0.118$	-0.047 $-j0.136$	1.060 -0.220	-0.002 $-j0.003$	-0.057 $-j0.206$	0.657 $-j0.787$	1.251 $j0.962$

(7) 代表根の決定

代表根の留数限界図の上に表3の結果を軌跡として描くと、図13のようになる。図から代表根

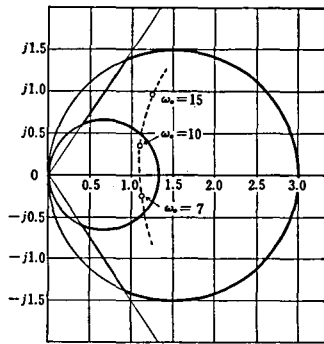


図 13 逆留数ベクトル軌跡

の条件を満たすのは、 ω_0 の値が約12以上、または約4.0以下となる。

ここで与えられた過渡特性仕様を満足し、しかも、速い応答速度を得るには、 $\omega_0=15$ が適当である。したがって、この系の代表根 s_0 は、

$$s_0 = (-0.5 + j)15 = -7.5 + j15 \dots\dots(56)$$

となる。

(8) 補償回路の回路定数の算定

$\omega_0=15$ rad/s に対する補償伝達関数の自由度 n および ω_{s1}, ω_{s2} の値は、表2から、 $n=40, \omega_{s1}=1.95$ rad/s, $\omega_{s2}=2.58$ rad/s であった。これを実現するための回路定数値は、 $C_2=10[\mu F]$ と定めたとすると、(43)式より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{C_2} \cdot (n-1) \left(\frac{1}{\omega_{s1}} - \frac{1}{n\omega_{s2}} \right) = 1.96[\text{M}\Omega] \\ R_2 &= \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{\omega_{s2}} = 38.8[\text{K}\Omega] \\ C_1 &= C_2 \cdot \frac{1}{\omega_{s1}} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(1/\omega_{s1} - 1/n\omega_{s2})} = 0.261[\mu F] \end{aligned} \right\} (57)$$

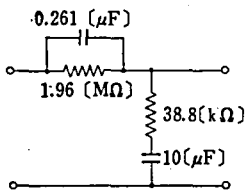


図 14 設計された補償回路

