線形制御系微分方程式の正規形への変換について

山　岸　　亘*

A Method of Transforming a Linear Vector-Matrix Differential Equation into the Canonical Form

Wataru Yamagishi

1. まえがき

最近，制御対象が完全可制御である線形制御系のベクトル微分方程式を正規形へ変換する方法が盛んに論議されている。[2][3][4][5]

Wonham 氏と Johnson 氏が最適化の問題に関連し，正規形への変換行列を求め得ることを示したが，[1] 具体的に示さなかったので，後に固有値が異なる場合に求める方法を示した。[2] 固有値に重複度のある場合は Mufti 氏が解決し，[3] さらにより簡単な方法を Chidambara 氏が発展させた。[4] Tou 氏は変換行列を求める際の Vandermonde のマトリックスの逆行列を求める簡便方法を示し，[5] Brule 氏は Vandermonde マトリックスの性質を論じている。[6]

Wonham, Johnson, Mufti, Chidambara 諸氏の論文は対象の係数行列が実数行列であるがその固有値が複素数になるときは過程の計算は複素数計算をすることになる。本論文は常に実数計算のみで変換行列を求める方法を示した。その際，係数行列を実数からなる準対角線形行列に変換する方法を副次的に示している。2節以下で使用する行列論および可制御に関する定理は付録にまとめておいた。

2. 問題の設定

単一入力の定常な線形制御系の動特性は次のベクトル微分方程式で記述される。

$$\dot{x}=Ax+fu \tag{1}$$

ここで　$x=\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ \vdots \\ x_n(\tau) \end{pmatrix}$ 対象の状態ベクトル；$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ 対象の係数行列

$f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ 駆動ベクトル；$u=u(t)$ スカラー制御関数；$\cdot=\dfrac{d}{d\tau}$

系(1)で表わされる制御対象 Af は完全可制御 (Completely Controllable) とする。[7][8]

定理1と Hamilton-Cayley の定理より定理2が得られるので，行列 A の固有多項式 $\chi(t)$ と

* 数学科

最小多項式 $\varphi(t)$ は等しい。したがって行列論の定理3より単因子 $e_i(t)$ は $e_1(t)=\cdots\cdots\cdots\cdots=e_{n-1}(t)=1$, $e_n(t)=\varphi(t)=\chi(t)$ となる。

$$\chi(t)=\varphi(t)=b_0+b_1t+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}t^{n-1}+t^n \tag{2}$$

とすると定理4から

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-2} & -b_{n-1} \end{pmatrix}\equiv B_0 \tag{3}$$

なる正則行列$\boldsymbol{P}$が存在する。

ゆえに，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ なる1次変換により(1)は

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}_0u \tag{4}$$

ただし $\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{f}=[0\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ 1]^T$ (5)

本論文は正則行列$\boldsymbol{P}$を求めることが目的である。その際，複素数行列を求めることなく実数行列のみから変換行列$\boldsymbol{P}$を求めるのに特徴がある。

3. 方法の概要

$\boldsymbol{A}$は実数行列であるから固有値は$\boldsymbol{A}$が実対称行列でなければ必ずしも実数とならぬ。したがって$\boldsymbol{A}$の固有値は複素数となり得る。$\boldsymbol{A}$を複素数体における行列と考えると，普通の Jordan 標準形定理5がなりたつ。しかし$\boldsymbol{A}$を実数体の行列とみるときは定理5はなりたたぬ。(2)を実数体において因数分解する。

$$\varphi(t)=\chi(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)(t-\mu_1)^{p_1}\cdots(t-\mu_s)^{p_s}\{(t-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\cdots\{(t-\alpha_v)^2+\beta_v^2\}$$
$$\{(t-\sigma_1)^2+\rho_1^2\}^{q_1}\cdots\{(t-\sigma_w)^2+\rho_w^2\}^{q_w}$$

（各因数互に素，$\beta_i>0$, $\rho_i>0$, $r+\sum_{i=1}^{s}p_i+2v+2\sum_{i=1}^{w}q_i=n$）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6)

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}\quad \boldsymbol{D}_i=\begin{pmatrix} \mu_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \mu_i \end{pmatrix}(q_i\text{次})\ i=1,\cdots,s \quad \boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}(2\text{次})\ i=1,\cdots,v$$

$$\boldsymbol{G}_i=\begin{pmatrix} \mathring{\boldsymbol{G}}_i & \boldsymbol{E}_2 & & \\ O_2 & \mathring{\boldsymbol{G}}_i & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{E}_2 \\ & & & \mathring{\boldsymbol{G}}_i \end{pmatrix}(2q_i\text{次})\ i=1,\cdots,w \quad \text{ただし}\ \mathring{\boldsymbol{G}}_i=\begin{pmatrix} \sigma_i & -\rho_i \\ \rho_i & \sigma_i \end{pmatrix}\ \text{とし}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{B}\oplus\boldsymbol{D}_1\oplus\cdots\cdots\oplus\boldsymbol{D}_s\oplus\boldsymbol{F}_1\oplus\cdots\cdots\oplus\boldsymbol{F}_v\oplus\boldsymbol{G}_1\oplus\cdots\cdots\oplus\boldsymbol{G}_w \tag{7}$$

を作る。固有行列 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Lambda}$ の単因子は主対角線上の細胞行列の最小多項式の最小公倍数が$\boldsymbol{\Lambda}$の最小多項式であることを用いて $e_n(t)=\varphi(t)=\chi(t)$ となるので $e_1(t)=\cdots\cdots=e_{n-1}=1$ $e_n(t)=\chi(t)$ より $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ の単因子と一致する。定理6により

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1} \tag{8}$$

なる実数の正則行列$\boldsymbol{M}$が存在する。$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ なる1次変換を(1)にほどこす。

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{d}u \tag{9}$$

完全可制御性より

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{f}=[\overbrace{1\cdots1}^{r},\ \overbrace{0\cdots0}^{P_1-1}1,\ \cdots,\ \overbrace{0\cdots0}^{P_s-1}1,\ \overbrace{1\ 0\ 1\ 0\cdots1\ 0}^{2v},\ \overbrace{0\cdots0}^{2q_1-2}1\ 1,\ \cdots,\ \overbrace{0\cdots0}^{2q_w-2}1\ 1]^T \tag{10}$$

(3)(8)より $M^{-1}AM=\varLambda=PB_0P^{-1}$ $\quad\therefore\ \varLambda=(MP)B_0(MP)^{-1}$ (11)

$MP=R$ とおくと $P=M^{-1}R,\ \varLambda=RB_0R^{-1}$ (12) (13)

1次変換 $Z=Ry$ により(4)は $\dot{Z}=\varLambda Z+du,\ d=Rf_0$ (14) (15)

(8)(13)の $MA=\varLambda M,\ RB_0=\varLambda R$ より $M,\ R$ を(10), (15)を考慮して求め(12)に代入Pを求める。

4. Mを求める方法

$A=[a_{ik}],\ M=[m_{ik}],\ m_i=[m_{i1}\cdots\cdots m_{in}]^T$ とし，$MA=\varLambda M$ を要素であらわす。ベクトル m_i の成分 $m_{i1}\cdots\cdots m_{in}$ を未知数とする4種類の連立方程式に表わされる。

$$(A^T-\lambda_iE)m_i=0,\ (fm_i)=1\quad(i=1\cdots r) \tag{16}$$

$l=r+p_1+\cdots\cdots+p_{i-1}$ とするとき

$$\begin{cases}(A^T-\mu_iE)m_{l+1}=m_{l+2} & (fm_{l+1})=0\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (A^T-\mu_iE)m_{l+p_i-1}=m_{l+p_i} & (fm_{l+p_i-1})=0\\ (A^T-\mu_iE)m_{l+p_i}=0 & (fm_{l+p_i})=1\end{cases}\quad(i=1\cdots\cdots s) \tag{17}$$

$l=r+p_1+\cdots\cdots+p_s+2i-2$ とするとき

$$\begin{cases}(A^T-\alpha_iE)m_{l+1}=-\beta_im_{l+2} & (fm_{l+1})=1\\ (A^T-\alpha_iE)m_{l+2}=\beta_im_{l+1} & (fm_{l+2})=0\end{cases}\quad(i=1\cdots\cdots v) \tag{18}$$

$l=r+\sum_{i=1}^{s}p_i+2v+2(q_1+\cdots+q_{i-1})$ とするとき

$$\begin{cases}(A^T-\sigma_iE)m_{l+1}=-\rho_im_{l+2}+m_{l+3} & (fm_{l+1})=0\\ (A^T-\sigma_iE)m_{l+2}=\rho_im_{l+1}+m_{l+4} & (fm_{l+2})=0\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (A^T-\sigma_iE)m_{l+2q_i-3}=-\rho_im_{l+2q_i-2}+m_{l+2q_i-1} & (fm_{l+2q_i-3})=0\quad(i=1\cdots w)\\ (A^T-\sigma_iE)m_{l+2q_i-2}=\rho_im_{l+2q_i-3}+m_{l+2q_i} & (fm_{l+2q_i-2})=0\\ (A^T-\sigma_iE)m_{l+2q_i-1}=-\rho_im_{l+2q_i} & (fm_{l+2q_i-1})=1\\ (A^T-\sigma_iE)m_{l+2q_i}=\rho_im_{l+2q_i-1} & (fm_{l+2q_i})=1\end{cases} \tag{19}$$

(16)(17)(18)(19)を解くために次の補題を証明する。

補題1 系(1)の行列Aを複素数体における行列とし，固有多項式 $\chi(t)$ は(6)で表わされるとする。すなわち

$\chi(t)=(t-\lambda_1)\cdots\cdots(t-\lambda_r)\{t-(\alpha_1+\beta_1j)\}\ \{t-(\alpha_1-\beta_1j)\}\cdots\cdots\{t-(\alpha_v+\beta_vj)\}\ \{t-(\alpha_v-\beta_vj)\}(t-\mu_1)^{p_1}\cdots\cdots(t-\mu_s)^{p_s}\{t-(\sigma_1+\rho_1j)\}^{q_1}\{t-(\sigma_1-\rho_1j)\}^{q_1}\cdots\cdots\{t-(\sigma_w+\rho_wj)\}^{q_w}\{t-(\sigma_w-\rho_wj)\}^{q_w}$

(各因数互に素，$\beta_i>0,\ \rho_i>0,\ r+\sum_{i=1}^{s}p_i+2v+2\sum_{i=1}^{w}q_i=n,\ j=\sqrt{-1}$)

このとき $\mathrm{rank}(A^T-\lambda_iE)=n-1\quad(i=1\cdots r)$ (20)

$\mathrm{rank}(A^T-\mu_iE)^{p_i}=n-p_i\quad(i=1\cdots s)$ (21)

$\mathrm{rank}(A^T-(\alpha_i+\beta_ij)E)=n-1\quad \mathrm{rank}(A^T-(\alpha_i-\beta_ij)E)=n-1\quad(i=1\cdots\cdots v)$

$\mathrm{rank}(A^T-(\sigma_i+\rho_ij)E)^{q_i}=n-q_i\quad \mathrm{rank}(A^T-(\sigma_i-\rho_ij)E)^{q_i}=n-q_i\quad(i=1\cdots\cdots w)$

がなりたつ。

補題2　行列 $(A^T-\alpha_iE)^2+\beta_i{}^2E$, $\{(A^T-\sigma_iE)^2+\rho_i{}^2E\}^{q_i}$ を実数体における行列とするとき，実数体における階数について

$$\mathrm{rank}\{(A^T-\alpha_iE)^2+\beta_i{}^2E\}=n-2 \qquad (i=1\cdots\cdots v) \tag{22}$$

$$\mathrm{rank}\{(A^T-\sigma_iE)^2+\rho_i{}^2E\}^{q_i}=n-2q_i \qquad (i=1\cdots\cdots w) \tag{23}$$

がなりたつ。

1の証明　複素数体上のn次元ベクトル空間をVとし，行列 A^T の表わす1次変換をfとする。$\chi(t)=|tE-A|=|tE-A^T|$ より $\chi(t)$ は A^T の固有多項式である。よって定理7と一般に1次変換gの rank と退化次数 def の関係 $\mathrm{rank}g+\mathrm{def}g=\dim V$ と $\mathrm{def}g=\dim(\mathrm{Ker}g)$ とより明らかである。

2の証明　fの多項式 $g(f)=\{(f-\sigma_i)^2+\rho_i{}^2\}^{q_i}$ は1次変換である。補題1より $\dim\mathrm{Ker}\{f-(\sigma_i\pm\rho_ij)\}^{q_i}=q_i$ であるから $\mathrm{Ker}\{f-(\sigma_i+\rho_ij)\}^{q_i}$ の基底を $\{x_1\cdots x_{q_i}\}$ とし，$\mathrm{Ker}\{f-(\sigma_i-\beta_ij)\}^{q_i}$ の基底を $\{y_1\cdots y_{q_i}\}$ とすれば合わせた $\{x_1\cdots x_{q_i}y_1\cdots y_{q_i}\}$ は

$$g(f)=\{f-(\sigma_i+\rho_ij)\}^{q_i}\{f-(\sigma_i-\rho_ij)\}^{q_i}=\{f-(\sigma_i-\rho_ij)\}^{q_i}\{f-(\sigma_i+\rho_ij)\}^{q_i}$$

と因数が交換できるから $\{x_1\cdots x_{q_i}\ y_1\cdots y_{q_i}\}\in\mathrm{Ker}g(f)$

しかも固有値が異なるから $2q_i$ 個は1次独立で $\mathrm{Ker}g(f)$ の基底となる。

$$\therefore\ \dim\mathrm{Ker}g(f)=\mathrm{def}g(f)=2q_i \qquad \therefore\ \mathrm{rank}\{(A^T-\sigma_iE)^2+\rho_i{}^2E\}^{q_i}=n-2q_i$$

実数行列 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ を適当にとれば

$$\boldsymbol{P}\{(A^T-\sigma_iE)^2+\rho_i{}^2E\}^{q_i}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix} \qquad (E_r\ r\text{次単位行列})$$

$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ を複素数体における正則行列とみなし，複素数体における行列の階数の一意性から

$$r=n-2q_i \qquad \therefore\ \mathrm{rank}\{(A^T-\sigma_iE)^2+\rho_i{}^2E\}^{q_i}=n-2q_i \quad (\text{実数体における階数})$$ 終

(16)の解法　m_i は A^T の固有値λ_iに対する固有ベクトルである。(20)より $\mathrm{rank}\ (A^T-\lambda_iE)=n-1$ であるから m_i についてとけ，m_i の1つの任意定数を $(\boldsymbol{f}m_i)=1$ よりきめれば一意に求まる。

(17)の解法　$\mathrm{rank}(A^T-\mu_iE)^{p_i}=n-p_i$ と p_i 個の式をまとめた $(A^T-\mu_iE)^{p_i}m_{l+1}=0$ より m_{l+1} が求まる。独立な p_i 個の任意定数を含む。m_{l+1} を第1式に代入し m_{l+2} を求め逐次代入して p_i 個の解を求める。$(\boldsymbol{f}m_{l+1})=0$, …… $(\boldsymbol{f}m_{l+p_i-1})=0$, $(\boldsymbol{f}m_{l+p_i})=1$ に代入し p_i 個の任意定数をきめて解を得る。

(18)の解法　第1式より $(A^T-\alpha_iE)^2m_{l+1}=-\beta_i(A^T-\alpha_iE)m_{l+2}$ 第2式を代入して $\{(A^T-\alpha_iE)^2+\beta_i{}^2E\}m_{l+1}=0$ (22) より $\mathrm{rank}\{(A^T-\alpha_iE)^2+\beta_i{}^2E\}=n-2$ であるから m_{l+1} が求まり2個の任意定数を含む。m_{l+1} を第1式に以入し m_{l+2} を求め $(\boldsymbol{f}m_{l+1})=1$, $(\boldsymbol{f}m_{l+2})=0$ より定数をきめればよい。

(19)の解法　複雑になるため $l=0$, $q_i=3$ の場合についてとく。

$$(A^T-\sigma E)m_1=-\rho m_2+m_3 \quad (24) \qquad (\boldsymbol{f}m_1)=0 \quad (30)$$

$$(A^T-\sigma E)m_2=\rho m_1+m_4 \quad (25) \qquad (\boldsymbol{f}m_2)=0 \quad (31)$$

$$(A^T-\sigma E)m_3=-\rho m_4+m_5 \quad (26) \qquad (\boldsymbol{f}m_3)=0 \quad (32)$$

$$(A^T-\sigma E)m_4=\rho m_3+m_6 \quad (27) \qquad (\boldsymbol{f}m_4)=0 \quad (33)$$

$$(A^T-\sigma E)m_5=-\rho m_6 \quad (28) \qquad (fm_5)=1 \quad (34)$$

$$(A^T-\sigma E)m_6=\rho m_5 \quad (29) \qquad (fm_6)=1 \quad (35)$$

(28) (29)から $\{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}m_5=0,\ \{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}m_6=0$ (36) (37)

(26) (27)から $\{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}m_3=-2\rho m_6,\ \{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}m_4=2\rho m_5$ (38) (39)

$\therefore\ \{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}^2m_3=0,\ \{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}^2m_4=0$ (40) (41)

(24) (25) (26)から $\{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}m_1=-2\rho m_4+m_5$ (42)

(42) (36) (39)から $\{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}^2m_1=-4\rho^2m_5$ (43)

$\therefore\ \{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}^3m_1=0$

よって，$\mathrm{rank}\{(A^T-\sigma E)^2+\rho^2E\}^3=n-6$ だから m_1 が求め得る。6つの独立な不定常数を含む。これを(43)に代入し，m_5 を求め m_5 を(28)に代入し，m_6 を求め，(42)に m_1 m_5 を代入し，m_4 を求める。

さらに，(27)に m_4 m_6 を代入し m_3 を求め(24)に m_1 と m_3 を代入し m_2 を求め，$m_1\cdots\cdots m_6$ が全部求まる。$m_1\cdots\cdots m_6$ に含まれる6つの不定常数は(30)～(35)に代入し決定する。

5. Rを求める方法

$R=[r_{ik}]$ とし，(13)の $RB_0=AR$ を要素で表わしMの求め方と全く同様にして四種類の方程式を作り r_{ik} についてとくことができる。なぜならば(3)より $B_0=P^{-1}AP$（P正則行列）であるから固有値，単因子，最小多項式が等しい。したがって4のAを B_0 に変えれば全く同じ方法でRを求めることができる。B_0 は同伴行列で形が極めて簡単のため r_{ik} を求める方程式も簡単になる。たとえば(16)(17)に相当する方程式は

$$\left\{\begin{array}{l}-b_0r_{in}=\lambda_ir_{i1}\\ r_{i1}-b_1r_{in}=\lambda_ir_{i2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{in-1}-b_{n-1}r_{in}=\lambda_ir_{in}\end{array}\right. \qquad (i=1,\ \cdots\cdots,\ r) \qquad (16')$$

$l=r+p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{i-1}$ のとき

$$\left\{\begin{array}{l}-b_0r_{l+k\ n}=\mu_ir_{l+k\ 1}+r_{l+k+1\ 1}\\ r_{l+k\ 1}-b_1r_{l+k\ n}=\mu_ir_{l+k\ 2}+r_{l+k+1\ 2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{l+k\ n-1}-b_{n-1}r_{l+k\ n}=\mu_ir_{l+k\ n}+r_{l+k+1\ n}\end{array}\right. \qquad (k=1\cdots\cdots p_i-1) \qquad (17')$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\left\{\begin{array}{l}-b_0r_{l+p_i\ n}=\mu_ir_{l+p_i\ 1}\\ r_{l+p_i\ 1}-b_1r_{l+p_i\ n}=\mu_ir_{l+p_i\ 2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{l+p_i\ n-1}-b_{n-1}r_{l+p_i\ n}=\mu_ir_{l+p_i\ n}\end{array}\right. \qquad (k=p_i\ \text{のとき}) \qquad (17')$$

である。なお(10) (15)より $d=[r_{1n}\ r_{2n}\cdots\cdots r_{nn}]^T$ を注意せよ。

6. 計　算　例

系(1)で $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ 6 & 8 & 7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ とする。

$$\chi(t)=|tE-A|=t^3-7t^2+19t-13=(t-1)(t^2-6t+13)$$

Aの固有値は $t=1,\ 3+2j,\ 3-2j$ である。$tE-A$ の行列式因子は $d_1(t)=1,\ d_2(t)=1,\ d_3(t)=\chi(t)$ となるから単因子 $e_1(t)=e_2(t)=1,\ e_3(t)=\chi(t)$ ゆえに

$\chi(t)=\varphi(t)$ が確かめられる。よって $B_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 13 & -19 & 7\end{pmatrix}$, $\varLambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

(16) (18)で $r=1,\ l=1,\ v=1$ とおき

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 6\\ -4 & 0 & 8\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11}\\ m_{12}\\ m_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ m_{11}+m_{12}+_{13}=1 \quad \therefore \begin{pmatrix}m_{11}\\ m_{12}\\ m_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$(A^T-3E)\boldsymbol{m}_2=-2\boldsymbol{m}_3,\ (A^T-3E)\boldsymbol{m}_3=2\boldsymbol{m}_2,\ (\boldsymbol{f}\boldsymbol{m}_2)=1,\ (\boldsymbol{f}\boldsymbol{m}_3)=0$$

より $\{(A^T-3E)^2+4E\}\boldsymbol{m}_2=0$ すなわち $\begin{pmatrix}16 & 0 & -16\\ 8 & 0 & -8\\ 8 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{21}\\ m_{22}\\ m_{23}\end{pmatrix}=0$

$$\therefore \begin{pmatrix}m_{21}\\ m_{22}\\ m_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ a\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}m_{31}\\ m_{32}\\ m_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b\\ -2a+b\\ -a+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a,\ b\text{任}\\ \text{意定数}\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}m_{21}\\ m_{22}\\ m_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{4}{10}\\ \frac{3}{10}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}m_{31}\\ m_{32}\\ m_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}\\ -\frac{2}{10}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

以上より $M=\begin{pmatrix}\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$, $M^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -3\\ -4 & 5 & 5\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{13}\\ r_{23}\\ r_{33}\end{pmatrix}$ より $r_{13}=1\quad r_{23}=0\quad r_{33}=1$ よって $R=\begin{pmatrix}13 & -6 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$

$$\therefore\ P=M^{-1}R=\begin{pmatrix}43 & -14 & 3\\ -7 & 10 & -3\\ -27 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

7. まとめ

計算過程に実数行列のみを扱うようにすることは計算を簡単にすることにはならぬが，変換行列を複素数行列を求めることなく実数範囲の計算のみで求めうる可能性は示すことができた。

係数行列の次数が低いときは有用であろう。副次的ではあるが(1)式が(9)式に変換させるには(8)が変換方法を示していることに注意されたい。行列論では適当な正則行列Mをとれば可能であるといっているが，完全可制御性より具体的に求めることができる。

この問題は解法をよりかんたんにしようという意図によるものであるが，全く別の観点から簡単化しようとする試みがなされていること[9][10]を付記しておく。

参考文献

(1) W. M. Wonham and C. D. Johnson, "Optimum bang-bang control with quadratic performance index," ASME Trans., J. of Basic Engrg., vol. 86, pp, 107—115; March, 1964

(2) C. D. Johnson and W. M. Wonham, "A note on the trasformation to canonical (Phase variable) form, IEEE. Trans. on Automatic Control, vol. AC—9, pp. 312—313, July 1964

(3) I. H. Mufti, "On the reduction of a system to canonical (phase-variable) form," IEEE Trans. On Automatic Control (Correspondence), vol. AC—10, pp. 206—207, April 1965

(4) M. R. Chidambara, "The transformation to (phase-variable) canonical form," IEEE Trans. On Automatic Control (Correspondence), vol. AC—10, pp. 492—494, October 1965

(5) J. T. Tou, "Determination of inverse Vandermonde matrix," IEEE Trans. On Automatic Control (Correspondence), vol. AC—9, pp. 314, July 1964

(6) J. D. Brule, "A note on the Vandermonde determinant," IEEE Trans. On Automatic Control (Correspondence) Vol. AC—9, pp314—315, July 1964

(7) R. E. Kalman, "When is a linear controll system optimal", ASME Trans., J. of Basic Engrg., vol. 86, pp. 51—60; March, 1964

(8) J. T. Tou, Modern Control Theory, New York, McGraw-Hill, 1964, pp. 51—53, pp. 149—154

(9) E. J. Davison, "A Method for simplifying linear dynamic systems," IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC—11, pp. 93—101, January 1966

(10) M. R. Chidambra, "On a method for simplifying linear dynamic systems," IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC—12, pp. 119—120, January1967

付録

定理1　$n\times n$ 行列 $[f,\ fA,\ \cdots,\ fA^{n-1}]$ の rank がnのとき，そのときのみ(1)式は完全可制御である。

定理2　微分方程式(1)が完全可制御であれば行列Aの最小多項式 $\varphi(t)$ と固有多項式 $\chi(t)$ とは一致する。

定理3　固有行列 $tE-A$ の単因子を $e_1(t)\cdots\cdots e_n(t)$ とすれば $\chi(t)=\prod_{i=1}^{n}e_i(t)$, $e_n(t)=\varphi(t)$

定理4　体Kにおける行列Aの固有行列 $tE-A$ の単因子の中で1でないものを $e_{h+1}(t)\cdots\cdots e_n(t)$ とし，$e_i(t)$ の同伴行列を B_i とすると $B=B_{h+1}\oplus\cdots\cdots\oplus B_n=P^{-1}AP$ なるKにおける正則行列Pが存在する。

定理5　複素数体における行列Aは固有値がすべて体の中にあるので複素数体における適当な正則行列によって Jordan 標準形行列に変換できる。

定理6　体Kにおけるn次の正方形行列A, Aに対して $A=MAM^{-1}$ となるKの正則行列Mが存在するた

めの必要十分条件は $tE-A$, $tE-\Lambda$ の単因子が一致することである。

定理7 fはn次元ベクトル空間Vの1次変換でその固有値 $\upsilon_1\cdots\cdots\upsilon_k$ はすべて基礎体Kに含まれるとする。そのときfの固有多項式$\chi(t)$ は$\chi(t)=(t-\upsilon_1)^{\gamma_1}\cdots\cdots(t-\upsilon_k)^{\gamma_k}$ の形に因数分解され，$\ker(f-\upsilon_i)^{\gamma_i}=W_i(i=1\cdots k)$ とすれば $V=W_1\oplus\cdots\cdots\oplus W_k$ $\dim W_i=\gamma_i$ となり，$f|W_i=f_i$ とすれば f_i の固有多項式は $(t-\upsilon_i)^{\gamma_i}$ となる。