

Z変換法による三次制御系の過渡 応答の一つの求め方について

山 岸 亘*

The Techniques of Approximating the Transient Response of the Third Degree Control Systems by the Z - Transform Method

Wataru Yamagishi

1. ま え が き

微分方程式のZ変換法による近似解法⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾については、Cruickshank 氏による方法や、Thaler 氏と、Boxer 氏による方法などいろいろある。

その中で、変係数⁽⁵⁾、非線形、高階制御系へ容易に拡張し適用でき、しかも初期条件をかんたんに導入できる Boxer 氏の方法がすぐれている。

平井氏⁽¹⁾は Boxer 氏の方法をむだ時間を含む変係数制御系および非線形制御系の過渡応答解析に拡張し適用した。

平井氏は二次系に適用したが、筆者はこれを三次系に拡張し、適用した。

Jury 氏⁽²⁾はZ一形を変係数、非線形制御系に適用できることを指摘しているが、ここでも三次系についての適用がない。

三次の制御系への適用公式を導くとともに三次系への適用を試みた。

2. 基本公式の導き方

Boxer 氏による方法を簡単に述べる。⁽²⁾

連続関数 $x(t)$ の不定積分

$$y_2(t) = \iint x(t)(dt)^2 \quad (1)$$

が与えられたとき

$$a_2 y_2(t+2T) + a_1 y_2(t+T) + a_0 y_2(t) = b_2 x(t+2T) + b_1 x(t+T) + b_0 x(t) \quad (2)$$

を満足する定数 $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0$ をみつける。

ただし、 T はサンプリング周期。

Laplace 変換の性質

$$L[f(t+nT)] = e^{nTs} L[f(t)] \quad L[y_2(t)] = \frac{1}{s^2} L[x(t)]$$

$$\text{ただし, } x^{(-1)}(0) = \left[\int x(t) dt \right]_{t=0} = 0, \quad x^{(-2)}(0) = \left[\int \int x(t) (dt)^2 \right]_{t=0} = 0 \quad (3)$$

とする。

この性質を使うと (2) 式は

$$\begin{aligned} (a_2 e^{2Ts} + a_1 e^{Ts} + a_0) \frac{1}{s^2} L[x(t)] &= (b_2 e^{2Ts} + b_1 e^{Ts} + b_0) L[x(t)] \\ (a_2 + a_1 + a_0) + (2Ta_2 + Ta_1)s + (2T^2a_2 + \frac{1}{2}T^2a_1)s^2 + (\frac{4}{3}T^3a_2 + \frac{1}{6}T^3a_1)s^3 \\ + (\frac{2}{3}T^4a_2 + \frac{1}{24}T^4a_1)s^4 + \dots \\ &= (b_2 + b_1 + b_0)s^2 + (2Tb_2 + Tb_1)s^3 + (2T^2b_2 + \frac{1}{2}T^2b_1)s^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 2Ta_2 + Ta_1 = 0 \\ 2T^2a_2 + \frac{1}{2}T^2a_1 = b_2 + b_1 + b_0 \\ \frac{4}{3}T^3a_2 + \frac{T^3}{6}a_1 = 2Tb_2 + Tb_1 \\ \frac{2}{3}T^4a_2 + \frac{1}{24}T^4a_1 = 2T^2b_2 + \frac{1}{2}T^2b_1 \end{cases}$$

これより $a_0 = 1$ とおくと

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 1 \quad b_0 = \frac{T^2}{12} \quad b_1 = \frac{10T^2}{12} \quad b_2 = \frac{T^2}{12}$$

となる。

よって, T を $x(t)$ の変化にくらべ十分小なるとき, (1)式は近似的に

$$y_2(t+2T) - 2y_2(t+T) + y_2(t) = \frac{T^2}{12}x(t+2T) + \frac{10T^2}{12}x(t+T) + \frac{T^2}{12}x(t) \quad (4)$$

なる差分方程式を満足する。(2)式より(4)式を導くには微分演算子, 積分演算子を使ってもできる。

$f(t)$ の Z 変換を $\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z)$ で表わすと $\mathcal{Z}\{f(t+mT)\} = z^m \{F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(kT)z^{-k}\}$ の関係がある。これを使って (4) 式の両辺を Z 変換すると,

$$\begin{aligned} z^2 \{Y_2(z) - y_2(0) - y_2(T)z^{-1}\} - 2z \{Y_2(z) - y_2(0)\} + Y_2(z) &= \frac{T^2}{12}z^2 \{X(z) - \\ x(0) - x(T)z^{-1}\} + \frac{10T^2}{12}z \{X(z) - x(0)\} + \frac{T^2}{12}X(z) \end{aligned} \quad (5)$$

$x(t)$ $y_2(t)$ が解析的であるとすると,

$$\left. \begin{aligned} x(T) &= x(0) + Tx(0) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}(0) + \dots \\ y_2(T) &= y_2(0) + Ty_2(0) + \frac{T^2}{2}\ddot{y}_2(0) + \dots \\ &= x^{(-2)}(0) + Tx^{(-1)}(0) + \frac{T^2}{2}x(0) + \dots \\ (3) \text{ より } &= \frac{T^2}{2}x(0) + \frac{T^3}{3!}\dot{x}(0) + \frac{T^4}{4!}\ddot{x}(0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) を (5) に代入し, 整理すると

$$\begin{aligned} Y_2(z) &= \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2} X(z) - \frac{T^2}{12} \frac{z(z+5)}{(z-1)^2} x(0) \\ &\quad + \frac{T^3}{12} \frac{z}{(z-1)^2} \dot{x}(0) - \frac{T^5}{180} \frac{z}{(z-1)^2} \ddot{x}(0) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式は (1) 式の Z 変換の近似式と考えられる。

同様に $y_1(t) = \int x(t) dt$

については

$$Y_1(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} X(z) - \frac{Tz}{2(z-1)} x(0) \quad (8)$$

となる。

3. 三次制御系への適用公式

2 重不定積分と同様に, 3 重不定積分

$$y_3(t) = \int \int \int x(t) (dt)^3 \quad (9)$$

について $\mathcal{Z}\{y_3(t)\}$ の近似式を導く。

(9) 式を差分方程式で近似すると,

$$y_3(t+3T) - 3y_3(t+2T) + 3y_3(t+T) - y_3(t) = \frac{T^3}{2} \{x(t+2T) + x(t+T)\} \quad (10)$$

となり, (10) 式を Z 変換して $Y_3(z)$ について整理すると,

$$\begin{aligned} Y_3(z) = & \frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} X(z) - \frac{T^3}{6} \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3} x(0) + \frac{T^4}{4!} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \dot{x}(0) \\ & + \frac{T^5}{5!} \frac{z}{(z-1)^2} \ddot{x}(0) + \frac{T^6}{6!} \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} \ddot{x}(0) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

三次制御系を表わす微分方程式を

$$\ddot{x}(t) + p(t)\ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + r(t)x(t) = 0 \quad (12)$$

とする。変係数としたのは応用を広くするため, 線形微分方程式であるが, 変係数とすることにより, 非線形にも応用できる。

(12) を変形し,

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \frac{d^2}{dt^2} \{p(t)x(t)\} + \frac{d}{dt} \{q(t)x(t)\} - 2 \frac{d}{dt} \{\dot{p}(t)x(t)\} \\ + \ddot{p}(t)x(t) - \dot{q}(t)x(t) + r(t)x(t) = 0 \end{aligned}$$

両辺の Laplace 変換をとる。

以後 $\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]_{t=0} = f^{(n)}(0)$, $\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right]_{t=0} = \ddot{f}(0)$, $f(0)$ を $f_0^{(n)}$, \dot{f}_0 , f_0 等と略記する。

$$\begin{aligned} s^3 X(s) - s^2 x_0 - s\dot{x}_0 - \ddot{x}_0 + s^2 L[p(t)x(t)] - s p_0 x_0 - \dot{p}_0 x_0 - p_0 \dot{x}_0 + s L[q(t)x(t)] - q_0 x_0 \\ - 2 \{s L[\dot{p}(t)x(t)] - \dot{p}_0 x_0\} + L[\ddot{p}(t)x(t)] - L[\dot{q}(t)x(t)] + L[r(t)x(t)] = 0 \end{aligned}$$

s^3 で割って

$$\begin{aligned} X(s) + \frac{1}{s} L[p(t)x(t)] + \frac{1}{s^2} L[q(t)x(t)] - \frac{2}{s^2} L[\dot{p}(t)x(t)] + \frac{1}{s^3} L[\ddot{p}(t)x(t)] \\ - \frac{1}{s^3} L[\dot{q}(t)x(t)] + \frac{1}{s^3} L[r(t)x(t)] = \frac{1}{s} x_0 + \frac{1}{s^2} \dot{x}_0 + \frac{1}{s^3} \ddot{x}_0 + \frac{1}{s^2} p_0 x_0 \\ - \frac{1}{s^3} \dot{p}_0 x_0 + \frac{1}{s^3} p_0 \dot{x}_0 + \frac{1}{s^3} q_0 x_0 \end{aligned}$$

(7) (8) (11) 式を用いて, 上式を Z 変換する。ただし, この際 $f(nT) = f_n$ と略記し, $\ddot{x}(0) =$

$x^{(4)}(0) = x^{(5)}(0) = \dots = 0$ とする。

なお、 $p(t)$ $q(t)$ $r(t)$ はサンプリング周期 T に対して変化が小さく、かつ、周期 T は十分小さいと仮定する。

$$\begin{aligned} X(z) + \frac{1}{2} \frac{z+1}{z-1} p_n X(z) - \frac{T}{2} \frac{z}{z-1} x_0 \dot{p}_0 + \frac{T^2}{12} \frac{z^2+10z+1}{(z-1)^2} q_n X(z) \\ - \frac{T^2}{12} \frac{z(z+5)}{(z-1)^2} q_0 \dot{x}_0 + \frac{T^3}{12} \frac{z}{(z-1)^2} \dot{q}_0 \dot{x}_0 \\ - 2 \left\{ \frac{T^2}{12} \frac{z^2+10z+1}{(z-1)^2} \ddot{p}_n X(z) - \frac{T^2}{12} \frac{z(z+5)}{(z-1)^2} \dot{p}_0 \dot{x}_0 + \frac{T^3}{12} \frac{z}{(z-1)^2} \ddot{p}_0 \dot{x}_0 \right\} \\ + \frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \ddot{p}_n X(z) - \frac{T^3}{6} \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3} \ddot{p}_0 \dot{x}_0 + \frac{T^4}{24} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \dddot{p}_0 \dot{x}_0 \\ + \frac{T^5}{120} \frac{z}{(z-1)^2} \dot{p}_0 \ddot{x}_0 - \frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \dot{q}_n X(z) + \frac{T^3}{6} \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3} \dot{q}_0 \dot{x}_0 - \frac{T^4}{24} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \ddot{q}_0 \dot{x}_0 \\ - \frac{T^5}{120} \frac{z}{(z-1)^2} \ddot{q}_0 \ddot{x}_0 + \frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} r_n X(z) - \frac{T^3}{6} \frac{z(2z+1)}{(z-1)^3} r_0 \dot{x}_0 \\ + \frac{T^4}{24} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \dot{r}_0 \dot{x}_0 + \frac{T^5}{120} \frac{z}{(z-1)^2} \ddot{r}_0 \ddot{x}_0 = \frac{z}{z-1} x_0 + \frac{Tz}{(z-1)^2} \dot{x}_0 \\ + \frac{Tz}{(z-1)^2} \dot{p}_0 \dot{x}_0 + \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} (\ddot{x}_0 - \dot{p}_0 \dot{x}_0 + \dot{p}_0 \ddot{x}_0 + q_0 \dot{x}_0) \end{aligned}$$

$X(z)$ について解き、整理すると、

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A'z^3 + B'z^2 + C'z}{Az^3 + Bz^2 + Cz + D} \\ &= \frac{A' + B'z^{-1} + C'z^{-2}}{A + Bz^{-1} + Cz^{-2} + Dz^{-3}} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{T}{2} p_n - \frac{T^2}{6} \dot{p}_n + \frac{T^2}{12} q_n \\ B &= -3 - \frac{T}{2} p_n - \frac{3}{2} T^2 \dot{p}_n + \frac{T^3}{2} \ddot{p}_n + \frac{3}{4} T^2 q_n - \frac{T^3}{2} \dot{q}_n + \frac{T^3}{2} r_n \\ C &= 3 - \frac{T}{2} p_n + \frac{3}{2} T^2 \dot{p}_n + \frac{T^3}{2} \ddot{p}_n - \frac{3}{4} T^2 q_n - \frac{T^3}{2} \dot{q}_n + \frac{T^3}{2} r_n \\ D &= -1 + \frac{T}{2} p_n + \frac{T^2}{6} \dot{p}_n - \frac{T^2}{12} q_n \\ A' &= \left(1 + \frac{T}{2} p_0 - \frac{T^2}{6} \dot{p}_0 + \frac{T^2}{12} q_0 \right) x_0 \\ B' &= \left(-2 - \frac{7}{6} T^2 \dot{p}_0 + \frac{T^3}{3} \ddot{p}_0 + \frac{5T^2}{6} q_0 - \frac{T^3}{3} \dot{q}_0 + \frac{T^3}{3} r_0 \right) x_0 \\ &\quad + \left(T + \frac{T^2}{2} \dot{p}_0 + \frac{T^3}{6} \ddot{p}_0 - \frac{T^4}{24} \ddot{p}_0 - \frac{T^3}{12} \dot{q}_0 + \frac{T^4}{24} \ddot{q}_0 - \frac{T^4}{24} \dot{r}_0 \right) \dot{x}_0 \\ &\quad + \left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^5}{120} \dot{p}_0 + \frac{T^5}{120} \ddot{q}_0 - \frac{T^5}{120} \ddot{r}_0 \right) \ddot{x}_0 \\ C' &= \left(1 - \frac{T}{2} p_0 + \frac{T^2}{3} \dot{p}_0 + \frac{T^3}{6} \ddot{p}_0 + \frac{T^2}{12} q_0 - \frac{T^3}{6} \dot{q}_0 + \frac{T^3}{6} r_0 \right) x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-T + \frac{T^2}{2} \dot{p}_0 - \frac{T^3}{6} \ddot{p}_0 - \frac{T^4}{24} \dddot{p}_0 + \frac{T^3}{12} \dot{q}_0 + \frac{T^4}{24} \ddot{q}_0 - \frac{T^4}{24} \dot{r}_0 \right) \dot{x}_0 \\
& + \left(\frac{T^2}{2} + \frac{T^5}{120} \dot{p}_0 - \frac{T^5}{120} \ddot{q}_0 + \frac{T^5}{120} \ddot{r}_0 \right) \ddot{x}_0
\end{aligned}$$

二次制御系の動作を表わす微分方程式

$$\ddot{x}(t) + p(t) \dot{x}(t) + q(t) x(t) = 0 \quad (14)$$

については

$$X(z) = \frac{A' + B' Z^{-1}}{A + B Z^{-1} + C Z^{-2}} \quad (15)$$

ただし,

$$A = 12 + 6T\dot{p}_n - T^2\ddot{p}_n + T^2\dot{q}_n$$

$$B = -24 - 10T^2\dot{p}_n + 10T^2\dot{q}_n$$

$$C = 12 - 6T\dot{p}_n - T^2\ddot{p}_n + T^2\dot{q}_n$$

$$A' = (12 + 6T\dot{p}_0 - T^2\ddot{p}_0 + T^2\dot{q}_0) x_0$$

$$B' = (-12 + 6T\dot{p}_0 - 5T^2\ddot{p}_0 + 5T^2\dot{q}_0) x_0 + (12T + T^3\ddot{p}_0 - T^3\dot{q}_0) \dot{x}_0$$

4. 適用例

この方法による過渡応答の求め方の妥当性を示すために、三次制御系に適用する。

まず、過渡応答が正確に積分で得られるものと比較し、妥当性をしらべてみる。

三次制御系の工学的な例として、増幅器、直流発電機、電動機を結んだ位置サーボ系を例にとる。

図1にこの系のブロック線図を示す。この一巡伝達関数は、

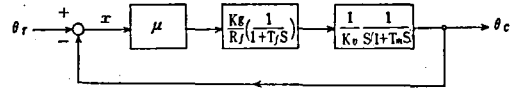


図 1 位置サーボ系

$$G(s) = \frac{\mu}{K_v} \frac{K_g}{R_f} \frac{1}{S(1+T_f S)(1+T_m S)} = \frac{K}{S(1+T_f s)(1+T_m S)}$$

$$\text{ただし } K = \frac{\mu K_g}{K_v R_f}$$

で系の微分方程式は $x(t) = \theta_r(t) - \theta_e(t)$ とおくと

$$T_f T_m \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_f + T_m) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + Kx = T_f T_m \frac{d^3 \theta_r}{dt^3} + (T_f + T_m) \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} + \frac{d\theta_r}{dt}$$

$\theta_r(t)$ がステップ入力の場合は

$$T_f T_m \frac{d^3 x}{dt^3} + (T_f + T_m) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad (16)$$

となる。(16)式は

$$\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) + rx(t) = 0 \quad p, q, r \text{ は定数} \quad (17)$$

と表わされるから (17) によって表わされる微分方程式に適用した場合のこの方法の妥当性をしらべてみる。

正確な解を得るために、 p , q , r の数値は実例とはやや違うが、つぎの例によって検討してみる。

〔例 1〕

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 1.26\dot{x}(t) + 0.26x(t) = 0 \quad (18)$$

初期条件を $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ のもとにとく。正確な解は

$$x(t) = e^{-t} + 10e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{10}t \quad (19)$$

$$p(t) = 2, \quad q(t) = 1.26, \quad r(t) = 0.26, \quad \dot{p}_0 = \dot{p}_n = 0, \quad \dot{r}_0 = \dot{r}_n = 0, \quad x_0 = 1,$$

$\dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0$ 等を公式 (3) に代入し、 $T = 0.5$ とすると、 $X(z)$ は

$$X(z) = \frac{1.5263 - 1.7267z^{-1} + 0.5317z^{-2}}{1.5263 - 3.2474z^{-1} + 2.2800z^{-2} - 0.5263z^{-3}}$$

$X(z)$ を割算し z^{-1} の中に展開する。

$$\begin{aligned} X(z) = & 1 + 0.9963z^{-1} + 0.9743z^{-2} + 0.9294z^{-3} + 0.8656z^{-4} + 0.7827z^{-5} + 0.6927z^{-6} \\ & + 0.6031z^{-7} + 0.5182z^{-8} + 0.4405z^{-9} + 0.3711z^{-10} + 0.3102z^{-11} + 0.2575z^{-12} \\ & + 0.2124z^{-13} + 0.1742z^{-14} + 0.1421z^{-15} + \dots \end{aligned}$$

z^{-n} の係数は $x(0.5n)$ の近似値である。正確な解と殆んど一致しているが念のため真値といくつか比較してみる。(19) 式より真値は $x(2) = 0.8656$ $x(3) = 0.7099$ $x(5) = 0.4001$ $x(7.5) = 0.1609$ で $t = 5$ で絶対誤差が 0.0290, $t = 7.5$ で 0.0188 である。 $T = 0.5$ としてこれくらいであるから T をもつと小さくすれば実用的には十分よい近似といえる。

〔例 2〕

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5.25\dot{x}(t) + 4.25x(t) = 0 \quad (20)$$

初期条件を $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ としてとく。正確な解は

$$x(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin 2t \quad (21)$$

例 1 と同様にして、公式 (3) より $T = 0.5$ として

$$X(z) = \frac{1.6094 - 0.7291z^{-1} + 0.6979z^{-2}}{1.6094 - 2.2500z^{-1} + 1.7812z^{-2} - 0.6094z^{-3}}$$

$X(z)$ を z^{-1} の中に展開すると、

$$\begin{aligned} X(z) = & 1 + 0.9450z^{-1} + 0.6481z^{-2} + 0.2388z^{-3} - 0.0256z^{-4} - 0.05468z^{-5} + 0.04231z^{-6} \\ & + 0.1100z^{-7} + 0.08624z^{-8} + 0.01699z^{-9} - 0.03007z^{-10} + \dots \end{aligned}$$

(21) 式より真値を求める。

$$\begin{aligned} x(1) &= 0.6436 & x(1.5) &= 0.2561 & x(2) &= -0.00406 & x(2.5) &= -0.0553 \\ x(3) &= -0.00895 & x(4) &= 0.0852 & x(5) &= -0.0156 \end{aligned}$$

となる。両者をグラフでくらべると図 2 となる。

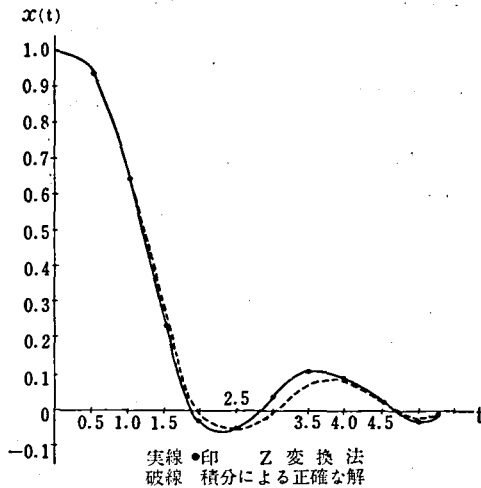


図 2 例 2 の過渡応答

とらねばよい近似は得られない。誤差の問題についてはここではふれない。⁽²⁾⁽³⁾

【例 3】

平井氏は二次変係数制御系に適用し、その妥当性を示した。⁽¹⁾ ここでも妥当性を示すために、Jury 氏による⁽²⁾ liner interpolation operator による計算例の結果と比較した。

$$\text{例 } \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = -0.9 \frac{dv}{dt} \quad v = x^2 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$$

微分方程式は $\ddot{x}(t) + (2+1.8x(t))\dot{x}(t) + x(t) = 0$ となるから
 $\ddot{x}(t) + (2+1.8C)\dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(t) = C$ とする。 $T=0.4$ として、公式(5)に代入する。

$$X(z) = \frac{4.8z^{-1}}{(16.96+4.32c_n)-22.4z^{-1}+(7.36-4.32c_n)z^{-2}}$$

ただし、各 z^{-n} の係数を求める段階ごとに

$C_{n+1} = x(nT)$ に変えて係数を求める。

$$\begin{aligned} X(z) = & 0.2830z^{-1} + 0.3142z^{-2} + 0.3100z^{-3} \\ & + 0.2699z^{-4} + 0.2341z^{-5} \\ & + 0.1973z^{-6} + 0.1628z^{-7} \\ & + 0.1317z^{-8} + \dots \end{aligned} \quad \text{となる。}$$

図 3 にグラフで比較を示す。

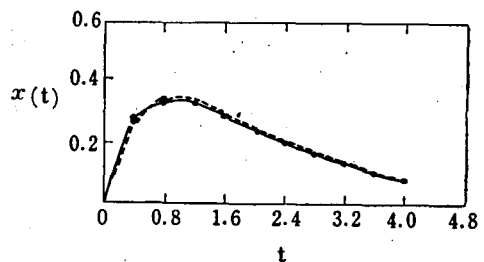


図 3 二次変係数制御系の過渡応答

平井氏の研究結果とあわせ二次の変係数制御

系ではこの方法の妥当性を認めることができる。三次の定係数の場合も認め得ることは前の 2 例によりわかったので、この方法を三次制御系の変係数、非線形にも適用し、その結果を示す。

市川氏は⁽⁶⁾高階非線形系の解析をフィードバック制御系サーボ機構などを示す三階の飽和ゲイン系について漸近法による解析を行なっている。ここでもこれと似た図 4 に示す系について、この近似法により過渡応答を求めてみる。過渡応答のみ求める場合には市川氏による解析方法よりかなり簡単に求められる。

(16)において、 $T_f=0.05[\text{sec}]$ $T_m=0.4$
 $[\text{sec}]$ $K=2.5[\text{rad/sec}]$ とおいた微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 22.5\dot{x}(t) + 50x(t) + 125x(t) = 0$$

では積分計算による解は

$$x(t) = 0.01659e^{-20.85t} + 1.1616e^{-1.075t} \cdot \sin(129^\circ 16't + 57^\circ 51')$$

となる。

$T=0.5$ として $x(0.5)$ $x(1)$ の値をくらべると $t=0.5$ のとき絶対誤差が 0.0993, $t=1$ のとき 0.2024 となり誤差が比較的大きい。角速度が大きく振動が強い場合は T を十分小さく

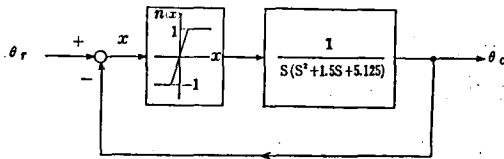


図 4 三次の飽和ゲイン系

しかし、安定性の考察や応答の解析的表示などできぬのが欠点である。

図4に示す系について、 θ_r がステップ入力
のとき、 x に関する微分方程式は

$$\ddot{x}(t) + 1.5\dot{x}(t) + 5.125x(t) + 1.85n(x) = 0 \quad (22)$$

$$\text{ただし } n(x) = \begin{cases} 0.4 < x \text{ のとき} & 1 \\ |x| \leq 0.4 \text{ のとき} & \frac{5}{2}x \\ x < -0.4 \text{ のとき} & -1 \end{cases} \quad (\text{図5参照})$$

とする。

(22)を変形し、

$$\ddot{x}(t) + 1.5\dot{x}(t) + 5.125x(t) + r(x) \cdot x(t) = 0 \quad (23)$$

$$\text{ここで } r(x) = \begin{cases} 0.4 < x \text{ のとき} & \frac{1.85}{x} \\ |x| \leq 0.4 \text{ のとき} & 4.625 \\ x < -0.4 \text{ のとき} & -\frac{1.85}{x} \end{cases}$$

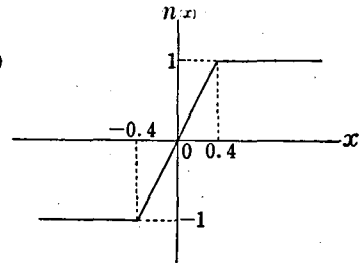


図 5 飽和要素

$x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ $r_0 = r(x_0) = 1.85$ $p_0 = p_n = 1.5$ $q_0 = q_n = 5.125$
等を公式(23)に代入し、 $T=0.4$ として

$$X(z) = \frac{1.3598 - 1.2772z^{-1} + 0.7795z^{-2}}{1.3598 + (-2.685 + 0.032r_n)z^{-1} + (2.085 + 0.032r_n)z^{-2} - 0.7598z^{-3}}$$

r_n に各段階毎に $r(x(n-1)T)$ を代入し $(r(x(n)T))$ を代入すべきであるが、未知のために $x(n-1)T$ のときの r の値で代用している。したがって何らかの方法でより正確な値が推定できればその値を代入すればよい。

$$X(z) = 1 + 0.9918z^{-1} + 0.9101z^{-2} + 0.7215z^{-3} + 0.3912z^{-4} - 0.1937z^{-5} - 0.1042z^{-6} \\ + 0.1304z^{-7} + 0.3061z^{-8} + 0.2987z^{-9} + 0.1275z^{-10} - 0.08156z^{-11} - 0.1946z^{-12} \\ - 0.1579z^{-13} - 0.02059z^{-14} + 0.1121z^{-15} + 0.1547z^{-16} + \dots$$

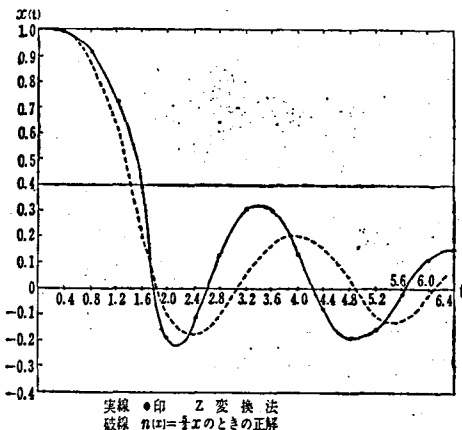


図 6 三次の飽和ゲイン系の過渡応答

を得る。

この過渡応答のグラフを図6に示す。なお、

(23)式は $|x| \leq 0.4$ のとき

$$\ddot{x} + 1.5\dot{x} + 5.125x + 4.625x = 0$$

となるので、 $n(x) = \frac{5}{2}x$ のときの正確な解

$$x(t) = e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-0.25t} \sin 2t$$

のグラフも図6に描いてある。

〔例 4〕

三次の変係数非線形制御系の適用例を示す。微分方程式は

$$\ddot{x}(t) + 1.5\ddot{x}(t) + (0.01t+5)\dot{x}(t) + 4.6x(t) + x^2(t) = 0 \quad (24)$$

$$\ddot{x}(t) + 1.5\ddot{x}(t) + (0.5t+5)\dot{x}(t) + 4.6x(t) + x^2(t) = 0 \quad (25)$$

とし、初期条件はいずれも $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ とする。

$$\ddot{x}(t) + 1.5\ddot{x}(t) + (0.01t+5)\dot{x}(t) + (4.6+c)x(t) = 0 \quad c=x$$

$T = 0.3$ として公式 (9) に代入する。ただし、この際 $q_n = 0.003n+5$ $r_n = 4.6+C_n$

とする。

$$X(z) = \frac{1.2625 - 1.5747z^{-1} + 0.8377z^{-2}}{(1.2625 + 2.15 \times 10^{-5}n) + (-2.8255 + 2.025 \times 10^{-4}n + 0.0135C_n)z^{-1} + (2.4995 - 2.025 \times 10^{-4}n + 1.35 \times 10^{-2}C_n)z^{-2} - (0.8125 + 2.15 \times 10^{-5}n)z^{-3}} \quad (26)$$

$c_1 = x(0) = 1$ として各段階ごとに c_n , q_n に適値をいれ z^{-1} について巾に展開すると

$$X(z) = 1 + 0.9799z^{-1} + 0.8561z^{-2} + 0.6112z^{-3} + 0.3189z^{-4} + 0.0676z^{-5} - 0.09623z^{-6} - 0.1584z^{-7} - 0.1275z^{-8} - 0.02575z^{-9} + 0.1076z^{-10} + \dots \quad (27)$$

微分方程式 (25) について、(26), (27) に相当する式は

$$X(z) = \frac{1.2625 - 1.5791z^{-1} + 0.8354z^{-2}}{(1.2625 + 0.001125n) + (-2.4322 + 0.010125n + 0.0135c_n)z^{-1} + (2.4928 - 0.010125n + 0.0135c_n)z^{-2} + (-0.8125 - 0.001125n)z^{-3}}$$

$$X(z) = 1 + 0.6566z^{-1} - 0.06673z^{-2} - 0.5149z^{-3} - 0.7953z^{-4} - 0.1744z^{-5} + 0.7809z^{-6} + 1.2327z^{-7} + 0.4341z^{-8} - 0.8264z^{-9} - 1.2692z^{-10} \dots$$

両者の過渡応答を図 7 に併記した。微分方程式 (24), (25) の解 $x(t)$ の性質は簡単に判断がつかねる。こんな際近似的ではあるが $x(t)$ の振舞をある程度知り得ることは有効な具体的方法といえる。

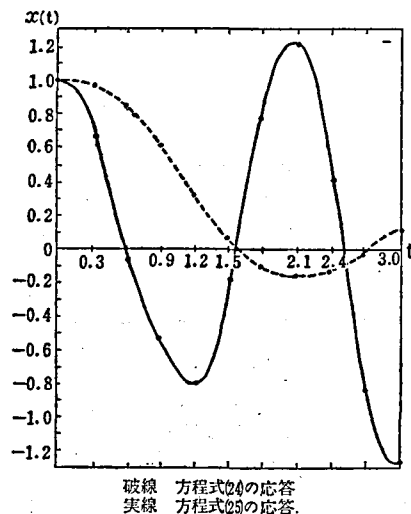


図 7 例 4 の過渡応答

5. む す び

この近似法は系を表わす微分方程式の安定性や解の解析的表示にわずかの情報しか提供せず、十分ではない。したがって系の安定性を解明できるようにするには幾多の問題があり、今後の課題である。

サンプリング周期 T の選択は結果に微妙な影響をもつ。 T の選び方については他の文献⁽²⁾⁽³⁾によって頂きたい。しかし T をある程度小さくすれば、系を表わす微分方程式が相当複雑なものでもかなり簡単に、単純な計算で解 $x(t)$ の振舞を知ることができる。

したがって工学的には満足される応答を得る場合が多い。

変係数 $p(t)$ $q(t)$ $r(t)$ について、もっと適切な条件をつけることにより、より精密な理論が展開できるであろう。

終りにこの論文を書く契機は平井氏の論文による。いまだお目にかかったことがないが神戸大学工学部平井一正先生に厚く感謝する。

参 考 文 献

- (1) 平井一正 : 電気学会誌 Vol. 85-3 504 (昭40)
- (2) E. I. Jury : Theory and Application of the Z-transform method, P 219~246, P 315 (1964)
- (3) E. I. Jury : Sampled-Data Control Systems, Chapter 8 (1958)
- (4) Ragazzini, J. R. and G. F. Franklin : Sampled-Data Control Systems (1959)
- (5) H. S. Teisn : Engineering Cybernetics, chapter 11.12 (P 160~177) (1954)
- (6) 市川邦彦 : 日本機械学会論文集 Vol 30-218 (昭 39-10) 1289