数式処理電卓からの発想

小 林 茂 樹*

An Idea from The Use of An Algebraic Calculator

KOBAYASHI Shigeki

We used the graph calculator which had a formula management function in the integral class. A student each defined the fixed integral calculus as a limit of the sum of the area in the calculator. Then, a student each computed this by using the formula management function. The understanding of the meaning of the definition of the fixed integral calculus was deepened by this process. And, we do the fixed integral calculus of the trigonometric function and the exponential function in accordance with the definition. This problem is available for the guidance of the basic theorem of the differential integral calculus.

キーワード: 数式処理電卓，微積分，教授法

1. はじめに

数式処理，関数のグラフ表示ができる電卓として，20 台の TI-89 を購入した．今回はそれに加えて，研究用に借用した 25 台をあわせて使用して，2 年生 2 クラスに対して定積分の授業を行った．本稿では，その報告と電卓を使用することから生まれた新しい教材について論ずる．

TI-89 は数式処理機能を持つグラフ電卓である．通常の多機能関数電卓とほぼ同じ程度の大きさであるが，Mathematica 等の本格的な数式処理ソフトには劣るが，高度な数式処理が可能であり，その能力は高専や大学の工学部での使用に耐えうるものである．

本校では教科書として、「微分積分 I（大日本図書)」を使用している．ここではまず定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

で定義し，いくつか定義に従って積分してから，定積分の性質，不定積分，定積分と不定積分との関係とつなげている．今回は，一関高専の梅野善雄教授による指導例[3]を参考にして，数式処理電卓の数式処理機能を利用して，和の極限としての定積分や，定積分と不定積分の関係の理解を深めようと試みた．

今回は教科書に沿って定積分と不定積分の説明が終わった後に，電卓の使用法や，グラフ機能，数式処理機能など主な機能を用いた例や演習を 50 分の 2 コマ連続で行った後の 2 コマ連続授業で実践した．

* 一般科助教授
原稿受付 2003 年5月 20 日

2. 和の極限としての定積分

2–1 $\int_0^1 x^2\,dx$

関数 $f(x) = x^2$ を区間 [0,1] で考え，n 等分した場合を考える．

(1) 区間 [0,1] を 2 等分して，長方形の高さを小区間の右端に対応する $f(x)$ の値で定めたときの，長方形の面積の和を計算させる．

(2)3 等分，4 等分した場合の面積を計算させる．

(3)n 等分した場合の，面積の和の式を書かせる．

(4)$f(x) = x^2$，$s(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を定義して $s(2), s(3), s(4)$ を表示させ，(1)(2) で求めた値と一致することを確認する．(図 1,2 は TI-89 の画面である．以下同様.)

(5)$s(n)$ を表示させて書き写させ，$n \to \infty$ のとき極限値を自分で計算させる．

(6) 電卓で極限値を求めて確認する．(図 3)

(7)$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ であることを確認させる．(図 4)

3. 定積分と不定積分の関係

3–1 $\int_0^x x^n\,dx$

関数 $f(x) = x^n$ を区間 $[0,x]$ で考え，n 等分した場合を考える．

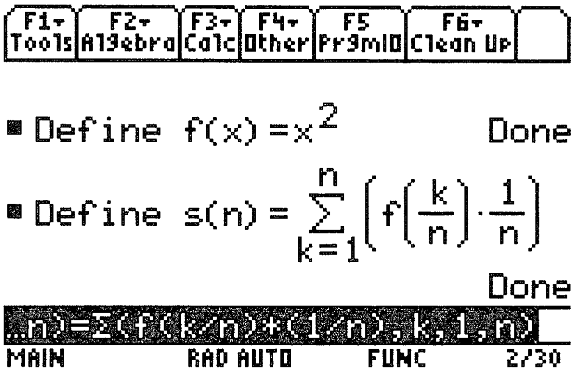

図 1

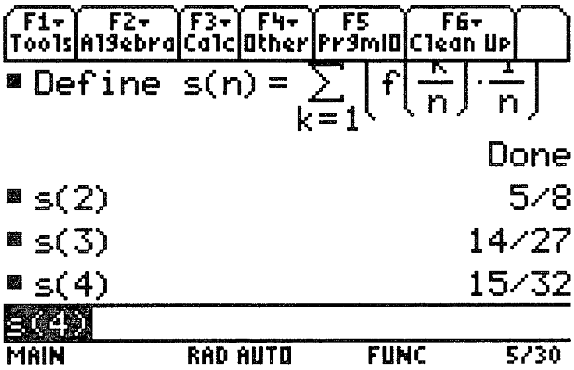

図 2

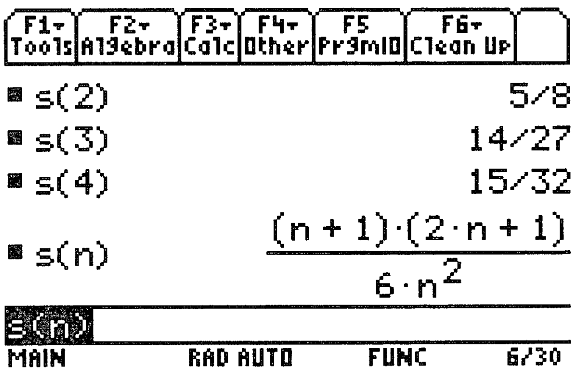

図 3

$s(n,x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)\frac{x}{n}, g(x)=\lim_{n\to\infty} s(n,x)$ とし，$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3,\ldots$ と変化させて，$f(x)$ と $g(x)$ との間にどのような関係があるかを確認させる．(図 5,6)

以上の手順により，

$$\int_0^x x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3$$
$$\int_0^x x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4$$
$$\int_0^x x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5$$

がわかる．ここから

$f(x)=x^n$ のとき $g(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ であること

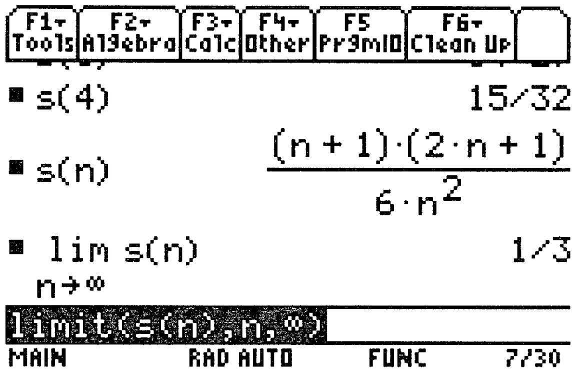

図 4

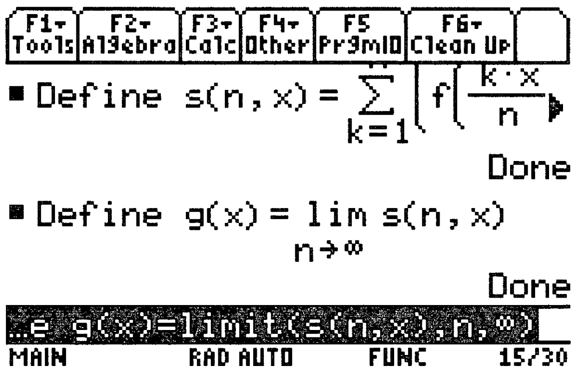

図 5

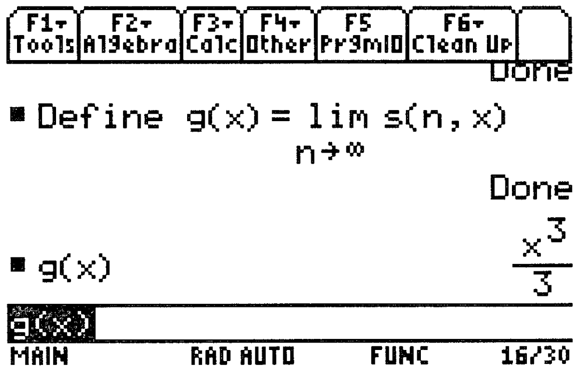

図 6

に，さらには

$$\left(\int_0^x x^2\,dx\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$$
$$\left(\int_0^x x^3\,dx\right)'=\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$$
$$\left(\int_0^x x^4\,dx\right)'=\left(\frac{1}{5}x^5\right)'=x^4$$

が成り立っていることが確認できる．

4. その他の $f(x)$ についての $\int_0^x f(x)\,dx$

授業ではまだ実践していないが，$f(x)=x^n$ のかわりに $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$，$f(x)=e^x$ 等として，$f(x)$ と $g(x)$ との間にどのような関係があるかを考えてみる．(図 7,8)

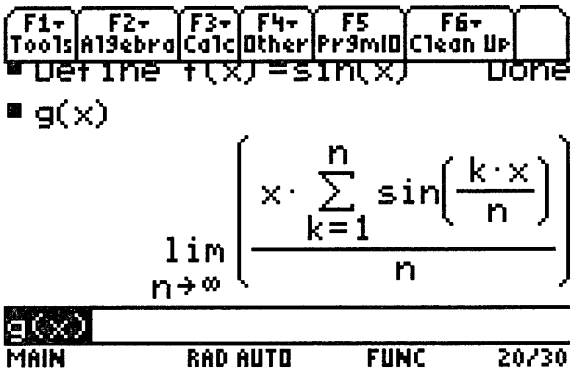

図 7

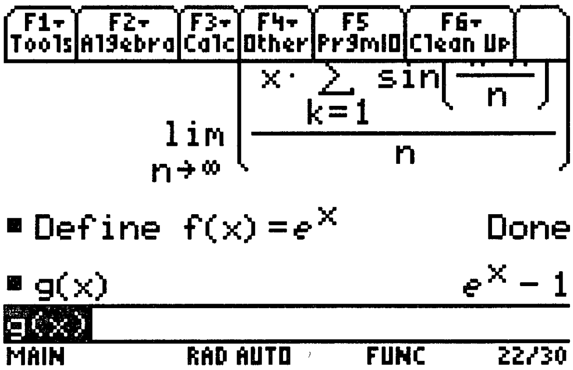

図 8

TI-89 では，$f(x)=e^x$ のときは $g(x)=e^x-1$ と計算できるが，$f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$ の場合は計算できない．そこで，これらの関数を定義にしたがって定積分する問題を考えた．

4−1 $\displaystyle\int_0^x \sin x\,dx$

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta$$
$$=-2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

より，

$$\sin n\theta=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}{-2\sin\frac{\theta}{2}}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta}{-2\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\frac{\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\int_0^x \sin x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kx}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin k\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\cdot\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x}{n}-\cos\frac{x}{2n}}{-2\sin\frac{x}{2n}}$$

ここで $\dfrac{x}{2n}=\theta$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ であるから，

$$\int_0^x \sin x\,dx$$
$$=\lim_{\theta\to 0}(2\theta)\cdot\frac{\cos(x+\theta)-\cos\theta}{-2\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot(\cos\theta-\cos(x+\theta))$$
$$=1-\cos x$$
$$\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\text{ より}\right)$$

4−2 $\displaystyle\int_0^x \cos\,dx$

同様にして，

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta=2\cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

より，

$$\cos n\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta}{-2\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\frac{\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\int_0^x \cos x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kx}{n}\right)\cdot\frac{x}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos k\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{2n}}{2\sin\frac{x}{2n}}$$

ここで $\dfrac{x}{2n}=\theta$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ で，

$$\int_0^x \sin x\,dx$$
$$=\lim_{\theta\to 0}(2\theta)\cdot\frac{\sin(x+\theta)-\sin\theta}{2\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot(\sin(x+\theta)-\sin\theta)$$
$$=\sin x$$

4−3 $\displaystyle\int_0^x e^x\,dx$

$$\int_0^x e^x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{kx}{n}}\cdot\frac{x}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{kx}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}(e^x - 1)}{e^{\frac{x}{n}} - 1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (e^x - 1) \cdot \frac{\frac{x}{n} \cdot e^{\frac{x}{n}}}{e^{\frac{x}{n}} - 1}$$

ここで $\frac{x}{n} = t$ とおくと，$n \to \infty$ のとき $t \to 0$ で，ロピタルの定理により

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \cdot e^t}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t + te^t}{e^t} = 1$$

であるから，

$$\begin{aligned} \int_0^x e^x \, dx &= \lim_{t\to 0}(e^x - 1) \cdot \frac{t \cdot e^t}{e^t - 1} \\ &= e^x - 1 \end{aligned}$$

4−4　定積分と不定積分の関係

これらの結果から，

$$\left(\int_0^x \sin x \, dx\right)' = (1 - \cos x)' = \sin x$$
$$\left(\int_0^x \cos x \, dx\right)' = (\sin x)' = \cos x$$
$$\left(\int_0^x e^x \, dx\right)' = (e^x - 1)' = e^x$$

が成り立っていることが確認できる．従来は，定義に従って積分している関数は x^n，$\frac{1}{x}$，$\sqrt{x}$ 等に限られているが，これにより微分積分法の基本定理

$S(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ とおくと　$S'(x) = f(x)$

がより印象深くなると考えられる．

また，極限値を求める計算問題として復習にもなると思われる．

5.　おわりに

数式処理電卓へのほとんどの入力はメニューから行えるので学生は簡単に電卓を使っていた．それでも途中では電卓の使用法の質問も出た．見慣れない画面になっていて，こちらが戸惑うこともあった．それでもパソコンなどよりも抵抗が少なく，”道具”という感覚になりやすいと思われる．

学生の反応はさまざまでどんどんといろいろな関数を試しているもの（$n = 100$ の場合を計算したり，$\int_0^x \sin x \, dx$ の場合を計算しているもの等）から，途中でやめてしまうものまでいた．パソコンや電卓を使用すれば学生が興味を持つというわけではない．やはり，内容や展開が重要であると考えられる．

ここでは $\int_0^x x^n \, dx$ を扱ったが，数式処理電卓を使用するとすると，容易に次数を高くして例を示すことができるので，予想が立てやすくなる．いくつかの例を計算してから一般の場合をまず予想して，証明するという流れを作り出しやすくなると考えられる．

このようなことは，数式処理のできるソフトがインストールされたパソコンでも可能である．しかし，数式処理電卓の場合は教室でも，いつでもどこでも利用できる利点がある．今回は使用する時間に教室に運んで使用したが，その点では利点が生かされなかった．家庭でも使える状況であると効果的であると考えられる．

今回の実践ではグラフ機能についてはいくつかの例を上げただけであるが，手軽に学生自身で使えるという点では良いと思う．授業で使ったプリントではMathmaticaの出力を用いた．プリントにするとか，全員に示すときにはそちらのほうが見やすい．グラフにしても他の機能にしても，電卓は各自が実験用，確認用に用いるときにより効果的である．

このような数式処理もできるグラフ電卓はいろいろな場面で使用できる．微分や積分についても今回は定義に従って行ったが，いきなりメニューからコマンドを選んで計算させることも可能である．しかし，従来から行ってきたような証明する力をつけさせる時間，基礎的計算力をつけさせるための時間を減らすことはできないので，より時間が必要になってくる．利用する授業時間についてだけでなく全体の見直しが必要になってくる．

今回は学生の意識調査等は行っていない．今後は，長期貸与するなどして，学生がいつでも使える状況の中での利用法や，学力への影響，学生の意識変化等についても研究が必要である．また，発見的な例や，他の分野や専門科の授業の中での使用法についても研究したいと考える．

参考文献

1) 数ナビ活用研究会：「すべての高専生に「数ナビを」」日本数学教育学会高専・大学部会論文誌第7巻，第1号 (2000,5),pp.141-142[1]
2) 梅野善雄：「グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界」日本数学教育学会高専・大学部会論文誌第7巻，第1号 (2000,5),pp.1-20[1]
3) 梅野善雄：「数式処理電卓を用いた微分積分教育の改善」日本数学教育学会高専・大学部会論文誌第8巻，第1号 (2001,6),pp.13-30[1]
4) 梅野善雄：「数式処理電卓の利用による数学に対する学生の意識変化」論文集「高専教育」第25(2002,3),pp.175-180[4]
5) 田河生長：「微分積分Ⅰ」大日本図書 [2]
6) 羽鳥裕久：「数学の小さな旅」近代科学社 [2]